

**Durch Faktorisierbarkeitseigenschaften definierbare
Schwartz-Räume**

Konrad Lang

1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555611_0059

Durch Faktorisierbarkeitseigenschaften definierbare Schwartz-Räume

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München



vorgelegt von
Konrad Lang
aus Berlin

eingereicht am: 31. Mai 1976



1. Berichterstatter: Professor Dr. W. Roelcke
2. Berichterstatter: Priv. Doz. Dr. M. Schottenloher

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Juni 1977

Inhaltsverzeichnis

§ 0	Einleitung	S.	4
§ 1	Vorbereitungen	S.	9
§ 2	$(\mathcal{K}-S)$ -Räume	S.	18
§ 3	$(\overline{1^P}-S)$ -Räume	S.	30
§ 4	(1^2-S) -Räume	S.	54
Literatur-Verzeichnis		S.	71

§ 0 Einleitung

Nach bekannten Sätzen ist ein lokalkonvexer Raum E genau dann ein nuklearer bzw. ein Schwartz-Raum (vgl. 1.1, 1.2, 1.3), wenn für alle Banach-Räume $X \in L(E, X)$, die Menge der stetigen linearen Abbildungen von E in X , nur aus nuklearen bzw. aus kompakten Abbildungen besteht. Die reichhaltige Theorie der nuklearen und der Schwartz-Räume, für nukleare Räume zum Beispiel dargelegt in den Monographien von Grothendieck [1] und Pietsch [1], für Schwartz-Räume etwa in Grothendieck [2], Floret [1], Horvath [1], hat das Interesse an solchen lokalkonvexen Räumen E wachgerufen, die durch gewisse Eigenschaften von $L(E, X)$ bei beliebig gegebenem Banach-Raum X definierbar sind. Hier liegt es nahe, als charakterisierendes Merkmal die Faktorisierbarkeit der $T \in L(E, X)$ für alle Banach-Räume X durch einen fest vorgegebenen Banach-Raum Z oder einen Banach-Raum aus einer fest vorgegebenen Klasse $\mathcal{K}$ von Banach-Räumen zu fordern und in Abhängigkeit hiervon die Struktur von E zu untersuchen.

Ich habe mich in der vorliegenden Arbeit auf die kompakte Faktorisierbarkeit von $T \in L(E, X)$ über ein gegebenes Z beschränkt - d. h. für alle Banach-Räume X und alle $T \in L(E, X)$ hat T eine Darstellung $T = T_2 \circ T_1$,

$T_1 : E \longrightarrow Z$, $T_2 : Z \longrightarrow X$, wobei T_1 und T_2 kompakt sind - und damit auf die Betrachtung gewisser Unterklassen der Klasse der Schwartz-Räume, weil mich ganz besonders die Beantwortung einer Frage interessierte, für die diese Beschränkung wesentlich ist. Es handelt sich dabei um folgendes Problem: Saxon zeigte in Saxon [1], daß in einem nuklearen Raum E zu jedem vorgegebenen unendlich-dimensionalen Banach-Raum X ein die Topologie von E erzeugendes Halbnormensystem $\{p_\iota; \iota \in I\}$ existiert, so daß für alle $\iota \in I$ $E/\overline{p_\iota^{-1}(0)}$ normisomorph einem abgeschlossenen linearen Teilraum von X ist; hier, wie im folgenden stets, ist $E/\overline{p_\iota^{-1}(0)}$ versehen mit der kanonisch von p_ι induzierten Norm. Diese Eigenschaft schien mir so interessant, daß mir eine Klassifikation der Räume dieser Eigenschaft wünschenswert erschien. Elementare Überlegungen zeigen, daß hierfür nur eine Raumklasse in Frage kommt, die zwischen der Klasse der nuklearen und der Klasse der Schwartz-Räume liegt. Hier bot sich der Versuch an, ein lokalkonvexes E dieser Raumklasse durch kompakte Faktorisierbarkeitseigenschaften der $T \in L(E, X)$ für beliebige Banach-Räume X zu charakterisieren. 4.12 und 2.6 lösen das Problem: Ein lokalkonvexer Raum E hat genau dann die oben beschriebene Eigenschaft, wenn für alle Banach-Räume X und alle $T \in L(E, X)$ T kompakt über l^2 faktorisierbar ist. Mit diesem Satz läßt sich ein zum Beispiel in

Morris, Diestel [1] gestelltes Problem lösen (vgl. 4.14): Man bestimme den Durchschnitt aller Varietäten lokalkonvexer Räume, (4.1, 4.2, 4.3), die von unendlich-dimensionalen Banach-Räumen erzeugt werden. Bei der Erarbeitung dieser beiden Hauptergebnisse wurde auch ein Stück weit die allgemeine Theorie der durch Faktorisierbarkeitseigenschaften definierbaren Schwartz-Räume verfolgt. Die Grundzüge des Vorgehens sollen kurz geschildert werden. Nach der Bereitstellung wichtiger Definitionen und Sätze im § 1 verfolgt der § 2 das allgemeinste Konzept, das in diesem Rahmen möglich ist: $\mathcal{K}$ sei eine feste Klasse gegebener Banach-Räume, dann heißt ein lokalkonvexer Raum E ($\mathcal{K}$ -S)-Raum, wenn für alle Banach-Räume X und alle $T \in L(E, X)$ T kompakt über ein $Z \in \mathcal{K}$ faktorisierbar ist. 2.4 und 3.17 zeigen, daß Schwartz-Räume als ($\mathcal{K}$ -S)-Räume und nukleare Räume als Schnitt von ($\mathcal{K}$ -S)-Räumen auffaßbar sind. 2.10 bringt einen Darstellungssatz für ($\mathcal{K}$ -S)-Räume, 2.6 und 2.11 betonen durch ihre mit 1.3 strukturell verwandten Aussagen noch einmal die begriffliche Nähe der ($\mathcal{K}$ -S)-Räume zu den nuklearen und den Schwartz-Räumen. In 2.7 und 2.9 wird kurz der Spezialfall $\mathcal{K} = \{Z\}$ beleuchtet, wobei Z ein Banach-Raum mit Approximationseigenschaft bzw. mit Schauderbasis ist. Im § 3 wird auf $\mathcal{K} = \{\overline{l^p}\}$ spezialisiert, wobei $\overline{l^p} := l^p$ für $1 \leq p < \infty$ und $\overline{l^\infty} := c_0$. Ein Hauptgewicht wird hier gelegt auf die Gewinnung von

möglichst vielen Beispielen an $(\overline{l^p}\text{-S})$ -Räumen (3.14, 3.15, 3.16) und auf die Untersuchung der gegenseitigen Lage der $(\overline{l^p}\text{-S})$ -Räume. 3.22 zeigt, daß die $(\overline{l^p}\text{-S})$ -Räume eine Eigenschaft haben, die erstmals von Grothendieck für nukleare Räume nachgewiesen wurde. 3.7, 3.11, 3.12 und 3.13 beschäftigen sich mit den stetigen linearen Abbildungen $T : E \longrightarrow F$ zwischen lokalkonvexen Räumen E und F , die kompakt über $\overline{l^p}$ faktorisiert sind, wobei für die folgenden Anwendungen der Darstellungssatz 3.11 dieser Abbildungen besonders wichtig ist. Im § 4 wird noch einmal weiter spezialisiert auf die $(l^2\text{-S})$ -Räume. Diese Räume zeigen die größte Strukturverwandtschaft mit den nuklearen und den Schwartz-Räumen unter den bislang behandelten $(Z\text{-S})$ -Räumen für einen Banach-Raum Z . Sie bilden eine Varietät lokalkonvexer Räume (vgl. 4.1, 4.2, 4.3, 4.6), und zu einer gegebenen lokalkonvexen Topologie $\mathcal{T}$ auf einem Raum E existiert daher die feinste Topologie $\mathcal{T}_{(l^2\text{-S})}$ unter allen lokalkonvexen Topologien $\mathcal{V} < \mathcal{T}$, für die $(E, \mathcal{V})$ ein $(l^2\text{-S})$ -Raum ist (4.9). In 4.10 wird eine Nullumgebungs-basis von $\mathcal{T}_{(l^2\text{-S})}$ angegeben. Eine interessante Analogie zur Theorie der nuklearen Räume bringt 4.11: Für einen vollständig metrisierbaren $(l^2\text{-S})$ -Raum F ist auch $F_{\beta'}$ ein $(l^2\text{-S})$ -Raum. Nicht ohne Interesse sind vielleicht die Anmerkungen 4.15 und 4.16, die die einzigartige Stellung von l^2 und den $(l^2\text{-S})$ -Räumen unter den $\overline{l^p}$ und den $(\overline{l^p}\text{-S})$ -

Räumen noch einmal beleuchten. Die Hauptergebnisse 4.12 und 4.14 wurden schon erwähnt.

Auch an dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. W. Roelcke für seinen Rat und seine Hilfe beim Entstehen dieser Arbeit herzlich danken, sowie Herrn Prof. Dr. M. Schottenloher, Herrn Dr. H. Pfister und Herrn Dr. V. Eberhard für viele wertvolle Hinweise und Ratschläge. Frau Dr. S. Diebold danke ich für viele Gespräche und manche Ermutigung.

§ 1 Vorbereitungen

Mit E, F, G werden stets separierte lokalkonvexe topologische Vektorräume, mit X, Y, Z (B) -Räume über dem Grundkörper $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ bezeichnet, nach Bedarf wird auch eine Indizierung verwendet. Unter $E_\sigma, E_\tau, E_\beta$ bzw. $E'_\sigma, E'_\tau, E'_\beta$ ist jeweil die schwache, die Mackey- und die starke Topologie auf E bzw. E' bezüglich des natürlichen dualen Paares $\langle E, E' \rangle$ zu verstehen.

Wenn von Abbildungen $T : E \longrightarrow F$ gesprochen wird, so sind damit stets stetige lineare Abbildungen von E in F gemeint. Die Existenz einer Isomorphie $T : E \longrightarrow F$ wird durch $E \stackrel{\sim}{\underset{\text{top}}{=}} F$, die Existenz einer Norm-Isomorphie $T : X \longrightarrow Y$ wird durch $X \stackrel{\sim}{\underset{\text{norm}}{=}} Y$ ausgedrückt.

Wenn (x_n) eine Folge in E und (λ_n) eine Skalarfolge in $\mathbb{K}$ ist, so bedeutet die Sprechweise $\sum_n \lambda_n x_n$ konvergiert in E , daß die Folge $(\sum_{n=1}^m \lambda_n x_n)_m$ in E einen Limes hat. $L(E, F)$ sei die Menge der Abbildungen $T : E \longrightarrow F$ und $L_b(E, F)$ bzw. $L_c(E, F)$ sind $L(E, F)$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten bzw. präkompakten Teilmengen von E . $K(E, F)$ sei die Menge der kompakten Abbildungen $T : E \longrightarrow F$.

Mit p, q werden stets Zahlen aus dem erweiterten Intervall $[1, \infty]$ bezeichnet, und p' ist die Zahl q mit der Eigen-

schaft $1/p + 1/q = 1$, wobei festgesetzt wird $1/\infty = 0$.

Wie üblich sei mit $L_p(\mu)$ der (B)-Raum $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ der Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen $f: (\Omega, \Sigma, \mu) \rightarrow \mathbb{K}$ für einen Maßraum (Ω, Σ, μ) bezeichnet, deren p -te Potenz integrierbar ist (bzw. für $p = \infty$: die fast überall beschränkt sind), versehen mit der üblichen Norm. l^p sei der Spezialfall $l^p = \{(\lambda_n); (\lambda_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ und } \sum_n |\lambda_n|^p < \infty\}$ für $p \neq \infty$, $l^\infty = \{(\lambda_n); (\lambda_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ und } \sup_n |\lambda_n| < \infty\}$, wobei l^p mit der üblichen Norm versehen ist, die mit $\|\cdot\|_p$ bezeichnet sei. c_0 ist der abgeschlossene Teilraum der Nullfolgen aus l^∞ . Nützlich ist die folgende Konvention

$$\overline{l^p} = \begin{cases} l^p & 1 \leq p < \infty \\ c_0 & p = \infty \end{cases}.$$

l_n^p sei definiert durch $l_n^p = \{(\lambda_v); (\lambda_v) \in l^p \text{ und } \lambda_v = 0 \text{ für } v > n\}$. Für $(\lambda_n) \in \overline{l^p}$ bedeute $0 < (\lambda_n)$, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lambda_n > 0$.

Für ein gegebenes E sei $\mathcal{A}_E$ die Menge der nichtleeren absolutkonvexen und abgeschlossenen Teilmengen von E .

Wenn X , versehen mit der Norm $\|\cdot\|_X$, die Schauderbasis (x_n) hat, dann sei $\lambda_{(x_n)}(X)$ der zu dieser Schauderbasis kanonisch assoziierte Folgenraum, das heißt

$\lambda_{(x_n)}(X) = \{(\lambda_n); (\lambda_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ und } \sum_n \lambda_n x_n \text{ konvergiert in } X\}$, wobei $\lambda_{(x_n)}(X)$ mit der von $\|\cdot\|_X$ induzierten Norm versehen ist, $\|(\lambda_n)\| := \|\sum_n \lambda_n x_n\|_X$. Immer wird der Bezug auf eine

fest vorgegebene Schauderbasis (x_n) von X so offensichtlich sein, daß die einfachere Schreibweise $\lambda(X)$ hinreichend deutlich ist.

Projektive und induktive Spektren werden stets mit (E_L, f_{LK}, I) bzw. (E_L, f_{KL}, I) bezeichnet; hierbei sollen die Indexmengen I stets halbgeordnet und gerichtet sein. Von den zugehörigen projektiven bzw. induktiven Limiten $E = \varprojlim (E_L, f_{LK}, I)$ bzw. $E = \varinjlim (E_L, f_{KL}, I)$ setzen wir stets voraus, daß E gegeben ist als Teilraum bzw. Quotientenraum von $\prod_{L \in I} E_L$ bzw. $\bigoplus_{L \in I} E_L$; die kanonischen Abbildungen von $\varprojlim (E_L, f_{LK}, I)$ bzw. E in E_L bzw. in $\varinjlim (E_L, f_{KL}, I)$ werden mit p_L bzw. f_L bezeichnet für alle $L \in I$. Ein projektives bzw. induktives Spektrum heißt kompakt, wenn es zu jedem $L \in I$ ein $K \in I$ gibt, $K \geq L$, so daß $f_{LK} : E_K \rightarrow E_L$ bzw. $f_{KL} : E_L \rightarrow E_K$ kompakt ist.

In einem gegebenen E sei $A \in \mathcal{A}_E$; mit p_A sei die Eichhalbnorm von A auf dem linearen Teilraum $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nA$ bezeichnet, $p_A(x) = \inf \{ \lambda > 0; x \in \lambda A \}$ für $x \in A^*$. $E_A := A^* / p_A^{-1}(A)$, wobei E_A versehen ist mit der von p_A auf E_A kanonisch induzierten Norm. Ist ferner $B \in \mathcal{A}_E$, $B \subset \mathcal{P}A$ für ein geeignetes $\mathcal{P} > 0$, so ist $\varphi_{A,B} : E_B \rightarrow E_A$, $\hat{x} \mapsto x + p_A^{-1}(0)$, eine Abbildung, $\hat{x} := x + p_B^{-1}(0)$ für alle $x \in E$. Wenn

$U \in \mathcal{A}_E$ eine Nullumgebung in E ist, so rechnet man nach $(E_U)' \stackrel{\text{norm}}{\cong} E_U'$; wenn auch $V \in \mathcal{A}_E$ eine Nullumgebung ist,

$V \subset U$, so ist die zu $\varphi_{U,V}$ duale Abbildung $(\varphi_{U,V})' : E_U' \rightarrow E_V'$

gerade die Injektion φ_{V^0, U^0} . Die in dieser Situation gegebene Abbildung von $\widetilde{E}_V$ in $\widetilde{E}_U$ als eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung von $\varphi_{U, V} : E_V \rightarrow E_U$ wird der Einfachheit halber ebenfalls mit $\varphi_{U, V}$ bezeichnet. Für jede Nullumgebung $U \in \mathcal{A}_E$ sei die Abbildung $\varphi_U : E \rightarrow E_U$ (bzw. $\varphi_U : E \rightarrow \widetilde{E}_U$) erklärt durch die Zuordnung $x \mapsto x + p_U^{-1}(0)$ für alle $x \in E$. Eine beschränkte Menge $B \in \mathcal{A}_E$ heißt Banach-Scheibe, wenn E_B ein (B)-Raum ist.

1.1 Definition

Die Abbildung $T : E \rightarrow F$ heißt p -nuklear für $1 \leq p < \infty$, wenn T eine Darstellung $T = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n$ hat, wobei $(\lambda_n) \in l^p$, (a_n) eine gleichstetige Folge in E' und (y_n) eine Folge in F ist mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß $\sum_n \mu_n y_n$ in F konvergiert für alle $(\mu_n) \in l^p$. Für $p = 1$ heißt T nuklear.

Anmerkungen:

1) Üblicherweise lautet die Definition für die Nuklearität einer Abbildung $T : E \rightarrow F$ folgendermaßen:

$T : E \rightarrow F$ heißt nuklear, wenn T eine Darstellung $T = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n$ hat, wobei $(\lambda_n) \in l^1$, (a_n) eine gleichstetige Folge in E' und (y_n) eine Folge in einer Banach-Scheibe von F ist.

Diese Definition ist mit der in 1.1 gegebenen Definition

der Nuklearität einer Abbildung $T : E \longrightarrow F$ äquivalent. Offensichtlich genügt es hierbei zu zeigen, daß eine nach 1.1 nukleare Abbildung $T : E \longrightarrow F$ die in der obigen Definition geforderte Darstellung besitzt.

Sei also die Abbildung $T : E \longrightarrow F$ nach 1.1 nuklear,

d. h. $T = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n$, wobei $(\lambda_n) \in l^1$, (a_n) gleichstetig ist in E' und $\sum_n \mu_n y_n$ konvergiert für alle $(\mu_n) \in l^1$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (vgl. Köthe [1], p.173) ist dann

$$\begin{aligned} \phi : l^1 &\longrightarrow F \\ (\mu_n) &\longmapsto \sum_n \mu_n y_n \end{aligned}$$

eine Abbildung.

Es ist $(\lambda_n) = (\varepsilon_n \lambda_n')$ mit geeigneten Folgen $(\varepsilon_n) \in c_0$, $(\lambda_n') \in l^1$. Dann ist $T = \sum \lambda_n' \langle \cdot, a_n \rangle \varepsilon_n y_n$ und die Folge $(\varepsilon_n y_n)$ liegt in einer Banach-Scheibe $B \subset F$. Man setze etwa $B = \phi(K)$, wobei $K := \{(\varepsilon_n \mu_n); \sum_n |\mu_n| \leq 1\}$; da K absolutkonvex und kompakt ist, hat auch B diese Eigenschaft, da ϕ stetig und linear ist. Es folgt (vgl. Schaefer [1], I, 1.6), daß B eine Banach-Scheibe ist.

2) Die Abbildung $T : E \longrightarrow F$ sei p -nuklear für $1 \leq p < \infty$; ist q so gewählt, daß $1 \leq p \leq q < \infty$, so ist T auch q -nuklear.

Sei etwa $T = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n$, wobei $(\lambda_n) \in l^p$, (a_n) gleichstetig ist in E' und $\sum_n \mu_n y_n$ für alle $(\mu_n) \in l^q$ in F konvergiert. O. B. d. A. sei $1 \leq p < q < \infty$; man setze $\rho = \frac{1}{q}$. Dann ist $T = \sum_n \lambda_n^\rho \langle \cdot, a_n \rangle \lambda_n^{1-\rho} y_n$, wobei $(\lambda_n^\rho) \in l^q$ und

$\sum \mu_n \lambda_n^{1-p} y_n$ konvergiert in F für alle $(\mu_n) \in l^q$, denn es ist $(\mu_n \lambda_n^{1-p}) \in l^p$ für alle $(\mu_n) \in l^q$, wie man durch eine einfache Anwendung der Hölder-Ungleichung bestätigt.

1.2 Definition

E heißt Schwartz-Raum (p -nuklearer Raum), wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathcal{A}_E$ eine Nullumgebung $V \in \mathcal{A}_E$ gibt, $V \subset U$, so daß $\varphi_{U,V} : \tilde{E}_V \longrightarrow \tilde{E}_U$ eine kompakte (p -nukleare) Abbildung ist.

Schwartz-Räume und nukleare Räume werden künftig abgekürzt als (S)- bzw. (N)-Räume bezeichnet. Die wichtigsten Eigenschaften der (S)- und (N)-Räume stellt der folgende Satz zusammen.

1.3 Satz

Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:

- E ist ein (S)- bzw. ein (N)-Raum.
- Für jede Nullumgebung $U \in \mathcal{A}_E$ ist $\varphi_U : E \longrightarrow \tilde{E}_U$ eine kompakte bzw. nukleare Abbildung.
- Für jedes X und jede Abbildung $T : E \longrightarrow X$ ist T kompakt bzw. nuklear.
- Zu jeder gleichstetigen Menge $A \in \mathcal{A}_{E'_0}$ gibt es eine gleichstetige Menge $B \in \mathcal{A}_{E'_0}$, $A \subset B$, so daß $\varphi_{B,A} : E'_A \longrightarrow E'_B$ eine kompakte bzw. nukleare Abbildung ist.
- $\tilde{E}$ ist ein (S)- bzw. ein (N)-Raum.

(Einen Beweis hierfür findet man für (S)-Räume in Horvath [1] § 15, für (N)-Räume in Schaefer [1] , III, 7.2 und IV, 9.3.)

1.4 Definition und Satz

Zur lokalkonvexen Topologie $\mathcal{T}$ von E gibt es die assoziierte Schwartz- bzw. nukleare Topologie $\mathcal{T}_S$ bzw. $\mathcal{T}_N$, das ist die feinste unter allen Schwartz- bzw. nuklearen Topologien $\mathcal{V}$ auf E der Eigenschaft $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$. $\mathcal{T}_S$ ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Nullfolgen von E'_0 , wobei U eine $\mathcal{T}$ -Nullumgebungsbasis durchläuft. $\mathcal{T}_N$ ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den gleichstetigen Folgen (a_n) in E' mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß mit (a_n) auch $(n^k a_n)$ gleichstetig ist in E' für alle $k \in \mathbb{N}$. (Beweise findet man für $\mathcal{T}_S$ zum Beispiel in Swart [1] , 3.3, 3.4, für $\mathcal{T}_N$ in Brudovskii [1] .) Insbesondere sind also die Topologien $\mathcal{T}_S$ und $\mathcal{T}_N$ verträglich mit dem dualen Paar $\langle E, (E, \mathcal{T})' \rangle$.

Einer der meistgebrauchten Sätze in der Theorie der (S)-Räume ist das folgende Theorem von Banach-Dieudonné.

1.5 Satz

E sei metrisierbar; dann ist jede präkompakte Teilmenge von E enthalten in der absolutkonvexen abgeschlossenen Hülle einer geeigneten Nullfolge in E .

(Einen Beweis findet man in Schaefer [1] , IV, 6.3 Cor.1.)

Die absolutkonvexe abgeschlossene Hülle einer Nullfolge läßt sich in vielen wichtigen Spezialfällen einfach berechnen.

1.6 Satz

E sei folgenvollständig; dann gilt für eine schwach gegen 0 konvergente Folge (x_n) in E

$$\overline{\{x_n; n \in \mathbb{N}\}} = \left\{ \sum_n \lambda_n x_n; \sum_n |\lambda_n| \leq 1 \right\}$$

(Einen Beweis findet man in Köthe [1], p. 250.)

1.7 Satz

Die Abbildung $T : X \longrightarrow Y$ ist genau dann kompakt, wenn $T' : Y' \longrightarrow X'$ kompakt ist.

(Einen Beweis findet man in Schaefer [1], III, 9.4.)

Ohne daß jetzt weiter auf die Theorie der topologischen Tensorprodukte eingegangen wird, sei mit $E' \otimes F$ die Menge der Abbildungen endlichen Ranges von E in F bezeichnet, d.h.

$$E' \otimes F = \left\{ T : E \rightarrow F; T = \sum_{l \in J} \langle \cdot, a_l \rangle y_l, |J| < \infty, a_l \in E', y_l \in F \right\}.$$

1.8 Definition und Satz

E hat die Approximationseigenschaft (künftig abgekürzt zu A.E.), wenn E eine der vier folgenden äquivalenten Eigenschaften besitzt:

- Der Abschluß von $E' \otimes E$ in $L_c(E, E)$ enthält die identische Abbildung von E in sich.
- $E' \otimes E$ ist dicht in $L_c(E, E)$.

c) Für jedes F ist $E' \otimes F$ dicht in $L_c(E, F)$.

d) Für jedes F ist $F' \otimes E$ dicht in $L_c(F, E)$.

(Einen Beweis findet man in Schaefer [1], III, 9.1.)

1.9 Satz

a) X hat genau dann die A.E., wenn für jedes Y der Abschluß von $Y' \otimes X$ in $L_b(Y, X)$ gerade $K(Y, X)$ ergibt.

b) X' hat genau dann die A.E., wenn für jedes Y der Abschluß von $X' \otimes Y$ in $L_b(X, Y)$ gerade $K(X, Y)$ ergibt.

c) Hat X' die A.E., so hat auch X die A.E.

§ 2 ($\mathcal{K}$ -S)-Räume

2.1 Definition

Die Abbildung $T : E \longrightarrow F$ heißt kompakt faktorisiert über X , wenn es kompakte Abbildungen T_1 und T_2 gibt, $T_1 : E \longrightarrow X$ $T_2 : X \longrightarrow F$, so daß $T = T_2 \circ T_1$.

2.2 Definition

$\mathcal{K}$ sei eine Klasse von (B)-Räumen. $T : E \longrightarrow F$ heißt ($\mathcal{K}$ -S)-Abbildung, wenn T eine kompakte Faktorisierung über ein $X \in \mathcal{K}$ besitzt.

2.3 Definition

$\mathcal{K}$ sei eine Klasse von (B)-Räumen. E heißt ($\mathcal{K}$ -S)-Raum, wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathcal{A}_E$ eine Nullumgebung $V \in \mathcal{A}_E$ gibt, $V \subset U$, so daß $\varphi_{U,V} : \tilde{E}_V \longrightarrow \tilde{E}_U$ eine ($\mathcal{K}$ -S)-Abbildung ist.

2.4 Bemerkung

Unmittelbar klar ist, daß jeder ($\mathcal{K}$ -S)-Raum ein (S)-Raum ist; umgekehrt ist aber auch für eine geeignete Klasse $\mathcal{K}$ von (B)-Räumen jeder (S)-Raum ein ($\mathcal{K}$ -S)-Raum. Man setze zum Beispiel $\mathcal{K} = \{X; X \text{ ist abgeschlossener Teilraum von } c_0\}$. Wenn E ein (S)-Raum ist, dann erhalten wir aus einem Satz von Terzioglu (vgl. Swart [1], 2.15), daß zur gegebenen Nullumgebung $U \in \mathcal{A}_E$ eine Nullumgebung $V \in \mathcal{A}_E$ existiert, $V \subset U$, eine beschränkte Folge (a_n) in E'_V und ein $(\lambda_n) \in c_0$,

so daß für alle $x \in \widetilde{E}_V$ gilt

$$(*) \quad \|\psi_{U,V}(x)\| \leq \sup |\lambda_n \langle x, a_n \rangle|.$$

Diese Abschätzung liefert nun wie folgt eine kompakte Faktorisierung über ein $X \in \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} g_1 : \widetilde{E}_V &\longrightarrow c_0 \\ x &\longmapsto (|\lambda_n|^{1/2} \langle x, a_n \rangle)_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2 : g_1(\widetilde{E}_V) &\longrightarrow c_0 \\ (\xi_n) &\longmapsto (|\lambda_n|^{1/2} \xi_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 : g_2(g_1(\widetilde{E}_V)) &\longrightarrow \widetilde{E}_U \\ g_2(g_1(x)) &\longmapsto \psi_{U,V}(x). \end{aligned}$$

Mit (*) folgt, daß g_3 eine Abbildung ist. Da g_2 stetig und linear ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung von g_2 zu einer Abbildung $\widetilde{g}_2 : \overline{g_1(\widetilde{E}_V)} \longrightarrow c_0$. Es ist $\widetilde{g}_2(g_1(\widetilde{E}_V)) \subset \overline{g_2(g_1(\widetilde{E}_V))}$ und zu dem stetigen linearen g_3 gibt es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einer Abbildung $\widetilde{g}_3 : \overline{g_2(g_1(\widetilde{E}_V))} \longrightarrow \widetilde{E}_U$. Dann beschreibt $\psi_{U,V} = (\widetilde{g}_3 \circ \widetilde{g}_2) \circ g_1$ eine kompakte Faktorisierung über $\overline{g_1(\widetilde{E}_V)} \in \mathcal{K}$.

2.5 Lemma

$T : (E, \mathcal{V}) \longrightarrow X$ ist genau dann eine kompakte Abbildung, wenn $T : (E, \mathcal{V}_S) \longrightarrow X$ stetig ist.

Beweis:

Die Implikation " $\Leftarrow$ " ist offensichtlich richtig, da $(E, \mathcal{V}_S)$

ein (S)-Raum ist; also ist nach 1.3 jede Abbildung $T : (E, \mathcal{T}_S) \longrightarrow X$ kompakt, und die Kompaktheit bleibt beim Übergang zu $(E, \mathcal{T})$ erhalten.

Wenn umgekehrt $T : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow X$ kompakt ist, dann ist für $p_T := \|T(\cdot)\|$ die Quotientenabbildung $Q : E \longrightarrow E/p_T^{-1}(0)$, $E/p_T^{-1}(0)$ versehen mit der von p_T induzierten Norm, präkompakt (vgl. Randtke [1], 2.3) Nach Randtke [1], Theorem 2.5 gibt es eine Nullumgebung U in $(E, \mathcal{T})$ und eine Nullfolge (a_n) in E'_0 , so daß für alle $x \in E$ die Abschätzung $(*) \quad \|T(x)\| \leq \sup_v | \langle x, a_v \rangle |$ gilt. Nach 1.4 ist $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}^0$ eine Nullumgebung in $(E, \mathcal{T}_S)$ und wegen $(*)$ ist $T : (E, \mathcal{T}_S) \longrightarrow X$ eine Abbildung.

2.6 Satz

$\mathcal{K}$ sei eine Klasse von (B)-Räumen. Äquivalent sind:

- E ist ein $(\mathcal{K}-S)$ -Raum.
- Für alle X und alle Abbildungen $T : E \longrightarrow X$ ist T eine $(\mathcal{K}-S)$ -Abbildung.
- Für jede Nullumgebung $U \in \mathcal{A}_E$ ist $\varphi_U : E \longrightarrow \widetilde{E}_U$ eine $(\mathcal{K}-S)$ -Abbildung.

Falls $\mathcal{K}$ eine Klasse reflexiver (B)-Räume ist und

$\mathcal{K}' := \{X'; X \in \mathcal{K}\}$, so ist mit a), b), und c) überdies noch äquivalent:

- Zu jeder gleichstetigen Menge $A \in \mathcal{A}_{E'_0}$ gibt es ein gleichstetiges $B \in \mathcal{A}_{E'_0}$, $A \subset B$, so daß $\varphi_{B,A} : E'_A \longrightarrow E'_B$ eine $(\mathcal{K}'-S)$ -Abbildung ist.

Beweis:

"a) $\Rightarrow$ b)" Sei $T : E \longrightarrow X$ eine gegebene Abbildung. Dann gibt es in E eine Nullumgebung $U \in \mathcal{A}_E$, so daß $\|T(x)\| \leq 1$ für alle $x \in U$. Aus dieser Abschätzung folgt die Existenz einer Faktorisierung $T = \hat{T} \circ \varphi_U$, $\varphi_U : E \longrightarrow \tilde{E}_U$, $\hat{T} : \tilde{E}_U \longrightarrow X$, wobei $\hat{T}$ die eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung der Abbildung $T^* : E_U \longrightarrow X$,

$\varphi_U(x) \longmapsto T(x)$, ist. T^* ist eine Abbildung, denn es gilt $\text{Kern } \varphi_U \subset \text{Kern } T$ und $\|T^*(x)\| \leq 1$ für alle $x \in \varphi_U(U)$.

Nach Voraussetzung gibt es zu U in E eine Nullumgebung $V \in \mathcal{A}_E$, $V \subset U$, so daß $\varphi_{U,V} : \tilde{E}_V \longrightarrow \tilde{E}_U$ eine $(\mathcal{K}\text{-S})$ -Abbildung ist. Wegen $\varphi_U = \varphi_{U,V} \circ \varphi_V$ ist φ_U , und damit auch T , eine $(\mathcal{K}\text{-S})$ -Abbildung.

"b) $\Rightarrow$ c)" ist offensichtlich.

"c) $\Rightarrow$ a)" U sei eine gegebene Nullumgebung aus $\mathcal{A}_E$;

$\varphi_U : E \longrightarrow \tilde{E}_U$ besitzt nach Voraussetzung eine kompakte Faktorisierung $\varphi_U = T_2 \circ T_1$ über ein $Z \in \mathcal{K}$. Wie in

"a) $\Rightarrow$ b)" sieht man, daß zur kompakten Abbildung $T_1 : E \longrightarrow Z$ eine Nullumgebung $V \in \mathcal{A}_E$ existiert, $V \subset U$, so daß $T_1(V)$ relativ kompakt ist in Z , $\|T_1(x)\| \leq 1$ für alle $x \in V$, und daß sich $T_1 : E \longrightarrow Z$ durch $T_1 = \hat{T}_1 \circ \varphi_V$, $\varphi_V : E \longrightarrow \tilde{E}_V$, $\hat{T}_1 : \tilde{E}_V \longrightarrow Z$, kompakt über $\tilde{E}_V$ faktorisieren läßt, denn aus der in "a) $\Rightarrow$ b)" angewandten Konstruktion folgt unschwer, daß $\hat{T}_1(\overline{\varphi_V(V)}^{\tilde{E}_V})$ relativ kompakt ist in Z . $\varphi_{U,V}$ ist also eine $(Z\text{-S})$ -Abbildung.

"d) $\Rightarrow$ a)" Die gleichstetigen Mengen $A, B, C \in \mathcal{A}_{E'_0}$ seien so gewählt, daß $A \subset B \subset C$ gilt, wobei $\varphi_{B,A} : E'_A \rightarrow E'_B$, $\varphi_{C,B} : E'_B \rightarrow E'_C$ ($\mathcal{K}$ -S)-Abbildungen sind und insbesondere etwa $\varphi_{C,B}$ eine $(X'-A)$ -Abbildung sei für ein $X \in \mathcal{K}$. Man setze $A^0 = U$, $B^0 = V$, $C^0 = W$; dann sind U, V, W Nullumgebungen aus $\mathcal{A}_E$, und es gilt $U^0 = A$, $V^0 = B$, $W^0 = C$. Nach Voraussetzung und wegen 1.7 ist $(\varphi_{C,B})' : (E'_C)' \rightarrow (E'_B)'$ eine $(X-S)$ -Abbildung, also auch $(\varphi_{C,B})'|_{\widetilde{E}_W} = \varphi_{V,W}$ (vgl. Seite 11, letzte Zeile).

Sei etwa $\varphi_{V,W} = \pi_2 \circ \pi_1$, $\pi_1 : \widetilde{E}_W \rightarrow X$, $\pi_2 : X \rightarrow (E'_B)'$, mit kompakten Abbildungen π_1 und π_2 . Da $\varphi_{B,A} : E'_A \rightarrow E'_B$ die Adjungierte der Abbildung $\varphi_{U,V} : \widetilde{E}_V \rightarrow \widetilde{E}_U$ ist, gilt (Schaefer [1], IV, 9.2 Lemma 1) $(\varphi_{B,A})'((E'_B)') \subset \widetilde{E}_U$. Man setzt nun $\hat{\pi}_2 = (\varphi_{B,A})' \circ \pi_2$ und rechnet leicht nach $\varphi_{U,V} = \hat{\pi}_2 \circ \pi_1$, das heißt $\varphi_{U,W}$ ist eine $(X-S)$ -Abbildung. "a) $\Rightarrow$ d)" Wenn $\varphi_{U,V} : \widetilde{E}_V \rightarrow \widetilde{E}_U$ eine $(\mathcal{K}-S)$ -Abbildung ist, dann ist offenbar $\varphi_{V^0,U^0} : E'_{U^0} \rightarrow E'_{V^0}$ eine $(\mathcal{K}'-S)$ -Abbildung, denn φ_{V^0,U^0} ist gerade die Adjungierte zu $\varphi_{U,V}$ (vgl. Seite 11, letzte Zeile).

2.7 Satz

$\mathcal{K}$ sei eine Klasse von (B) -Räumen mit A.E.; dann hat jeder $(\mathcal{K}-S)$ -Raum die A.E.

Beweis:

Sei E ein $(\mathcal{K}-S)$ -Raum, U eine Nullumgebung aus $\mathcal{A}_E$ und $\hat{U}$ die abgeschlossene Einheitskugel von $\widetilde{E}_U$. Es genügt zu

zeigen (man vgl. auch Schaefer [1], III, 9.2), daß zu vorgegebenem präkompaktem $A \subset E$ ein $f \in E' \otimes \widetilde{E}_U$ existiert, so daß für alle $x \in A$ $\psi_U(x) - f(x) \in 1/8 \hat{U}$.

Es habe nämlich f die Darstellung $f = \sum_{i=1}^m \langle \cdot, a_i \rangle \hat{y}_i$

mit $a_i \in E'$ und $y_i \in \widetilde{E}_U$, $i = 1, \dots, m$. Dann gibt es, da

A präkompakt, n endlich und E_U dicht ist in $\widetilde{E}_U$, $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n$

in E_U , so daß für alle $x \in A$ gilt:

$(\sum_{i=1}^m \langle x, a_i \rangle \hat{y}_i - \sum_{i=1}^m \langle x, a_i \rangle \hat{z}_i) \in \frac{1}{8} \hat{U}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \|\psi_U(x) - \sum_{i=1}^m \langle x, a_i \rangle \hat{z}_i\| &\leq \|\psi_U(x) - f(x)\| + \|f(x) - \sum_{i=1}^m \langle x, a_i \rangle \hat{z}_i\| \\ &\leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

für alle $x \in A$. Sei etwa $\psi_U(z_i) = \hat{z}_i$; dann ist

$\psi_U(x - \sum_{i=1}^m \langle x, a_i \rangle z_i) \in \frac{1}{4} \hat{U}$ für alle $x \in A$ und wegen

$\psi_U^{-1}(\frac{1}{4} \hat{U}) \subset U$ gilt $(x - \sum_{i=1}^m \langle x, a_i \rangle z_i) \in U$ für alle $x \in A$,

das heißt $\overline{E' \otimes E}^{L_c(E, E)}$ enthält die identische Abbildung

von E auf sich und E hat nach 1.8 die A.E.

Zur gegebenen Nullumgebung $U \in \mathcal{A}_E$ gibt es nach Definition

eine Nullumgebung $V \in \mathcal{A}_E$, $V \subset U$, so daß $\psi_{U, V}$ durch

$\psi_{U, V} = T_2 \circ T_1$ kompakt über ein $Z \in \mathcal{K}$ faktorisiert ist.

Da T_1 kompakt ist und Z die A.E. hat, gibt es nach 1.9 eine

Folge von Abbildungen endlichen Ranges $(T_1^{(n)})$, so daß

$(\|T_1 - T_1^{(n)}\|)_n \in c_0$. Wegen $\psi_U = \psi_{U, V} \circ \psi_V$ ergibt sich

die zu beweisende Behauptung unmittelbar nach leichter

Rechnung.

2.8 Anmerkung

$\mathcal{K}$ sei eine Klasse von (B)-Räumen mit A.E.; dann gibt es

(S)-Räume, die keine ($\mathcal{X}$ -S)-Räume sind (vgl. Hogbe-Nlend [1], Théorème 4.1).

Sei etwa X ein (B)-Raum ohne A.E. (vgl. Lindenstrauss-Tzafriri [1], I, 2.14), X_S sei (in einer auch künftig gebrauchten Terminologie) X , versehen mit der zur Normtopologie assoziierten (S)-Topologie. Wäre X_S ein ($\mathcal{X}$ -S)-Raum, so müßte X_S nach 2.7 die A.E. haben. Für ein $T \in K(X, Y)$ ist $T : X_S \rightarrow Y$ nach 2.5 stetig, also gilt nach 1.8 $T \in \overline{(X_S \otimes Y)}^{L_c(X_S, Y)}$. Da X_S ein (S)-Raum ist, stimmt die Menge der präkompakten Teilmengen von X_S überein mit der Menge der beschränkten Teilmengen von X_S (vgl. Floret-Wloka [1], § 22, 1.3), also ist

$$L_c(X_S, Y) = L_b(X_S, Y). \text{ Wegen } X' = X'_S \text{ (vgl. 1.8) ist dann}$$

$$T \in \overline{(X'_S \otimes Y)}^{L_c(X_S, Y)} = \overline{(X'_S \otimes Y)}^{L_b(X_S, Y)} = \overline{(X' \otimes Y)}^{L_b(X, Y)},$$

und aus 1.9 folgt wegen der Abgeschlossenheit von $K(X, Y)$ in $L_b(X, Y)$ (vgl. Schaefer [1], III, 9.3), daß X die A.E. hat. Widerspruch!

2.9 Satz

X habe eine Schauderbasis (x_n) und E sei ein (X-S)-Raum; dann hat jede Abbildung $T : E \rightarrow Z$ eine Darstellung

$$T = \sum_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n, \text{ wobei } \sum_n \lambda_n y_n \text{ in } Z \text{ konvergiert für}$$

alle $(\lambda_v) \in \lambda(X)$ und $x \mapsto (\langle x, a_n \rangle)_n$ eine Abbildung von E in $\lambda(X)$ vermittelt; ferner konvergiert die Folge $(T^{(n)})$,

$$T^{(n)} := \sum_{v \leq n} \langle \cdot, a_v \rangle y_v, \text{ gegen } T \text{ in } L_b(E, Z).$$

Beweis:

$T : E \longrightarrow Z$ sei eine gegebene Abbildung, die Basiskonstante sei $1 \leq M$ und (f_n) sei die zu (x_n) assoziierte Folge biorthogonaler Funktionale. Nach 2.6 hat T eine kompakte Faktorisierung über X gemäß $T = T_2 \circ T_1$. U sei eine Nullumgebung in E und K sei ein Kompaktum von X , so daß $T_1(U) \subset K$. Nach 1.5 und 1.6 gibt es in X eine Nullfolge (z_n) , so daß $T_1(U) \subset \left\{ \sum_m \lambda_n z_n ; \sum_m |\lambda_n| \leq 1 \right\}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und ein beschränktes $B \subset E$ gegeben; zu B gibt es ein $\rho_0 > 0$ mit $B \subset \rho_0 U$. Man wähle n_0 so groß, daß $\rho_0 M \sup_{\nu > n_0} \|z_\nu\| \leq \varepsilon/3$. Zu n_0 wähle man m_0 so groß, daß

$$\rho_0 \|z_n - \sum_{\nu=1}^{m_0} \langle z_n, f_\nu \rangle x_\nu\| \leq \frac{\varepsilon}{3m_0}$$

für alle $n \leq n_0$ und $m \geq m_0$ gilt.

Man setze $a_n = f_n \circ T_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann hat (a_n) die im Satz verlangte Eigenschaft und es gilt für alle $x \in B$ und für alle $m \geq m_0$ (es ist $T_1(x) = \rho_0 \sum_m \lambda_n z_n$ mit

$\sum_m |\lambda_n| \leq 1$ für ein geeignetes $(\lambda_n) \in l^1$)

$$\begin{aligned} \|T_1(x) - \sum_{\nu=1}^m \langle x, a_\nu \rangle x_\nu\| &= \|\rho_0 \sum \lambda_\nu z_\nu - \sum_{\mu=1}^m \langle \rho_0 \sum \lambda_\nu z_\nu, f_\mu \rangle x_\mu\| \\ &\leq \rho_0 \left\| \sum_{\nu > m_0} \lambda_\nu z_\nu \right\| + \left\| \rho_0 \sum_{\nu \leq m_0} \lambda_\nu z_\nu - \sum_{\mu=1}^m \langle \rho_0 \sum_{\nu=1}^{m_0} \lambda_\nu z_\nu + \sum_{\nu > m_0} \lambda_\nu z_\nu, f_\mu \rangle x_\mu \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \rho_0 \left\| \sum_{\nu \leq m_0} \lambda_\nu z_\nu - \sum_{\mu \leq m} \sum_{\nu \leq m_0} \langle \lambda_\nu z_\nu, f_\mu \rangle x_\mu \right\| + \\ &+ \rho_0 \left\| \sum_{\mu \leq m} \sum_{\nu > m_0} \langle \lambda_\nu z_\nu, f_\mu \rangle x_\mu \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert $(T_1^{(n)})$ gegen T_1 in $L_b(E, X)$,

$T_1^{(n)} := \sum_{\nu=1}^n \langle \cdot, a_\nu \rangle y_\nu$. Man setze nun für alle $n \in \mathbb{N}$

$T_2(x_n) = y_n$, dann gilt offenbar $T = \sum_m \langle \cdot, a_n \rangle y_n$,

wobei (a_n) , (y_n) und $(T^{(n)})$ wegen der Stetigkeit von T_2 die geforderten Bedingungen erfüllen.

2.10 Satz

$\mathcal{K}$ sei eine Klasse von (B)-Räumen. E ist genau dann ein $(\mathcal{K}-S)$ -Raum, wenn es ein kompaktes projektives Spektrum (X_L, f_{LK}, I) mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- 1) Zu allen $L \in I$ gibt es ein $Z \in \mathcal{K}$, so daß $X_L \underset{\text{norm}}{\cong} Z$.
- 2) Zu allen $L \in I$ gibt es ein $K \geq L$, $K \in I$, so daß

$$\text{Bild } f_{LK} \subset \overline{\text{Bild } p_L}.$$

$$3) \tilde{E} \underset{\text{top}}{\cong} \varprojlim (X_L, f_{LK}, I)$$

Beweis:

Es sei E ein $(\mathcal{K}-S)$ -Raum und $\mathcal{L}_0$ eine Nullumgebungsbasis von Mengen aus $\mathcal{A}_E$. Dann gibt es zu jedem $U \in \mathcal{L}_0$ ein $V \in \mathcal{L}_0$, $V \subset U$, so daß $\varphi_{U,V} : \tilde{E}_V \longrightarrow \tilde{E}_U$ eine $(\mathcal{K}-S)$ -Abbildung ist. Sei

$$\mathcal{L}_0^* = \{ (V, U); V, U \in \mathcal{L}_0, V \subset U, \varphi_{U,V} \text{ ist } (\mathcal{K}-S)\text{-Abbildung} \}.$$

Auf $\mathcal{L}_0^*$ ist in kanonischer Weise eine gerichtete Halbordnung definiert durch die Festlegung $V \geq U \Leftrightarrow V \subset U$.

Diese Halbordnung wird zu einer gerichteten Halbordnung auf $I = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_0^*$ fortgesetzt durch die Festlegung

$$(V_1, U_1) \text{ (bzw. } U_1) \geq (V_2, U_2) \text{ (bzw. } V_2) \Leftrightarrow U_1 \subset V_2.$$

Für $(V, U) \in \mathcal{L}_0^*$ ist $\varphi_{U,V}$ eine $(\mathcal{K}-S)$ -Abbildung und läßt sich daher über ein $Z_{(V,U)} \in \mathcal{K}$ kompakt faktorisieren gemäß $\varphi_{U,V} = \pi_U^{(2)} \circ \pi_V^{(1)}$, wobei

$$\pi_V^{(1)} : \tilde{E}_V \longrightarrow Z_{(V,U)}; \pi_U^{(2)} : Z_{(V,U)} \longrightarrow \tilde{E}_U \text{ kompakte Abbil-}$$

dungen sind. Für alle $(V, U) \in \mathcal{X}_0^*$ setzt man

$X_{(V, U)} = Z_{(V, U)} \in \mathcal{X}$ und für $U \in \mathcal{X}_0$ $X_U = \widetilde{E}_U$. Für

$U_1 \subset V_2$ und $(V_1, U_1), (V_2, U_2) \in \mathcal{X}_0^*$ setzt man

$$f_{(V_2, U_2), (V_1, U_1)} = \pi_{V_2}^{(1)} \circ \varphi_{V_2, U_1} \circ \pi_{U_1}^{(2)} ;$$

$$f_{V_2, U_1} = \varphi_{V_2, U_1} ; \quad f_{(V_1, U_1), (V_1, U_1)} = \text{id}_{Z_{(V_1, U_1)}} ;$$

$$f_{V_1, (V_1, U_1)} = \varphi_{V_2, U_1} \circ \pi_{U_1}^{(2)} ; \quad f_{(V_2, U_2), U_1} = \pi_{V_2}^{(1)} \circ \varphi_{V_2, U_1} .$$

Man rechnet leicht nach, daß $(X_\mathcal{L}, f_{\mathcal{L}\mathcal{K}}, I)$ ein kompaktes projektives Spektrum ist, für das überdies, da $\mathcal{X}_0$ und

$\mathcal{X}_0^*$ konfinal zu I sind, auch gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{E} &\underset{\text{top}}{\cong} \varprojlim (\widetilde{E}_U, \varphi_{U, V}, \mathcal{X}_0^*) = \varprojlim (X_\mathcal{L}, f_{\mathcal{L}\mathcal{K}}, I) \\ &\underset{\text{top}}{\cong} \varprojlim (X_\mathcal{L}, f_{\mathcal{L}\mathcal{K}}, \mathcal{X}_0^*) . \end{aligned}$$

Hiermit sind die Bedingungen 1) und 3) erfüllt. Zu

$(V_1, U_1) \in \mathcal{X}_0^*$ wählt man ein $(V_2, U_2) \in \mathcal{X}_0^*$, $(V_2, U_2) \supseteq (V_1, U_1)$.

Da $(X_\mathcal{L}, f_{\mathcal{L}\mathcal{K}}, I)$ ein projektives Spektrum ist, gilt

$$p_{(V_1, U_1)} = \pi_{V_1}^{(1)} \circ p_{V_1} , \text{ das heißt}$$

$$\text{Bild } p_{(V_1, U_1)} = \pi_{V_1}^{(1)} (\text{Bild } p_{V_1}) \text{ und es folgt}$$

$$\pi_{V_1}^{(1)} (\text{Bild } p_{V_1}) \subset \overline{\text{Bild } p_{(V_1, U_1)}} .$$

Da nun Bild p_{V_1} in $X_{V_1} = \widetilde{E}_{V_1}$ dicht ist, gilt insbesondere

$$\pi_{V_1}^{(1)} (\widetilde{E}_{V_1}) \subset \overline{\text{Bild } p_{(V_1, U_1)}} .$$

Wegen $f_{(V_1, U_1), (V_2, U_2)} = \pi_{V_1}^{(1)} \circ \varphi_{V_1, U_2} \circ \pi_{U_2}^{(2)}$ und

Bild $\varphi_{V_1, U_2} \subset \widetilde{E}_{V_1}$ ist auch Bedingung 2) erfüllt.

Seien nun umgekehrt E und ein kompaktes projektives Spektrum (X_L, f_{Lk}, I) der Eigenschaften 1) und 2) gegeben, wobei $\tilde{E} \cong \varprojlim_{k \in I} (X_k, f_{Lk}, I)$. $T : E \longrightarrow X$ sei gegeben, und $\tilde{T} : \tilde{E} \longrightarrow X$ sei die eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung von T . U sei eine Nullumgebung in $\tilde{E}$, so daß $\|\tilde{T}(z)\| \leq 1$ für alle $z \in U$. Zu U gibt es ein $L \in I$ und eine Nullumgebung U^* in X_L , so daß $p_L^{-1}(U^*) \subset U$. Insbesondere gilt $\text{Kern } p_L \subset U$ und da $\tilde{T}(U) \subset X$ in X beschränkt ist, folgt $\text{Kern } p_L \subset \text{Kern } \tilde{T}$. Mithin läßt sich $\tilde{T}$ über Bild p_L mittels $f : \text{Bild } p_L \longrightarrow X$ durch die Vorschrift $f(p_L(x)) = \tilde{T}(x)$ stetig linear faktorisieren und $\tilde{f} : \overline{\text{Bild } p_L} \longrightarrow X$ sei die eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung von f . Nach Voraussetzung gibt es zu $L \in I$ ein $K \in I$, $K \geq L$, so daß f_{Lk} kompakt ist und $\text{Bild } f_{Lk} \subset \overline{\text{Bild } p_L}$. Wegen $f_{Lk} \circ p_K = p_L$, $\text{Bild } f_{Lk} \subset \overline{\text{Bild } p_L}$ und weil f_{Lk} und p_K kompakt sind, ist $\tilde{T}$ kompakt über X_K faktorisiert vermittels $\tilde{T} = (\tilde{f} \circ f_{Lk}) \circ p_K$. Weil X_K normisomorph zu einem $Z \in \mathcal{K}$ ist, wegen $\tilde{T}|_E = T$ und wegen 2.6 ist offenbar E ein $(\mathcal{K}\text{-S})$ -Raum.

2.11 Korollar

Unmittelbar aus 2.10 folgt, daß E genau dann ein $(\mathcal{K}\text{-S})$ -Raum ist, wenn $\tilde{E}$ ein $(\mathcal{K}\text{-S})$ -Raum ist.

2.12 Anmerkung

Von besonderem Interesse ist der Satz 2.10 dann, wenn $\mathcal{K} = \{X\}$, das heißt, wenn E ein $(X\text{-S})$ -Raum ist; alle

$X_{\mathcal{L}}$ des kompakten projektiven Spektrums $(X_{\mathcal{L}}, f_{\mathcal{L}K}, I)$ sind dann zu X normisomorph.

2.13 Anmerkung

Der Beweis von 2.10 zeigt, daß die Indexmenge I des kompakten projektiven Spektrums $(X_{\mathcal{L}}, f_{\mathcal{L}K}, I)$ stets von der Mächtigkeit einer Nullumgebungsbasis von E gewählt werden kann.

§ 3 $(\overline{l^p}$ -S)-Räume

3.1 Definition

X und Y seien isomorphe (B) -Räume;

$$d(X, Y) := \inf \left\{ \|T\| \|T^{-1}\|; T: X \longrightarrow Y \text{ ist Isomorphismus} \right\}$$

heißt der Banach-Mazur Abstand von X und Y .

3.2 Definition

(Lindenstrauss-Pelczynski) Sei $1 \leq \lambda$. X heißt $\mathcal{L}_{p, \lambda}$ -Raum, wenn es zu jedem endlich-dimensionalen Teilraum $B \subset X$ einen Teilraum $C \subset X$ gibt, $B \subset C$, $\dim C = m < \infty$, so daß der Banach-Mazur Abstand $d(C, l_m^p) \leq \lambda$. X heißt $\mathcal{L}_p$ -Raum, wenn X ein $\mathcal{L}_{p, \lambda}$ -Raum ist für ein $\lambda \geq 1$.

Der nächste Satz macht mit den Beispielen an $\mathcal{L}_p$ -Räumen bekannt.

3.3 Satz

- Für $1 < p < \infty$ ist X isomorph zu einem komplementierten Teilraum eines Raumes $L_p(\mu)$ genau dann, wenn X ein $\mathcal{L}_2$ - oder ein $\mathcal{L}_p$ -Raum ist.
- X ist genau dann ein $\mathcal{L}_1$ -Raum, wenn X' injektiv ist.
(Ein Z heißt injektiv, wenn Z in allen $Y \supset Z$ ein komplementierter Teilraum ist.)
- X ist genau dann ein $\mathcal{L}_\infty$ -Raum, wenn X' isomorph ist zu einem komplementierten Teilraum eines $L_1(\mu)$ -Raumes.
- X ist genau dann ein $\mathcal{L}_p$ -Raum, wenn X' ein $\mathcal{L}_{p'}$ -Raum ist.

(Einen Beweis von a), b) und c) findet man in Lindenstrauss-Tzafriri [1], II, 5.7; d) ist eine unmittelbare Folgerung aus a), b), c) (vgl. Lindenstrauss-Tzafriri [1], II, 5.8).)

Zur Formulierung des nächsten, in diesem Zusammenhang wichtigen Satzes werden noch einige abkürzende Bezeichnungen benötigt. Für gegebene X, Y, Z sei

$$F(X, Y) = \overline{X' \otimes Y}^{L_b(X, Y)} \quad \text{und}$$

$$F_Z(X, Y) = \left\{ T \in F(X, Y); \text{ es gibt } T_1 \in F(X, Z), T_2 \in F(Z, Y), \text{ so daß } T = T_2 \circ T_1 \right\}.$$

Für ein $T \in F(X, Y)$ gilt $T' \in F(Y', X')$.

3.4 Satz

- 1) Sei $p \in \{1, \infty\}$; X ist genau dann ein $\mathcal{L}_p$ -Raum, wenn für alle Y gilt $F(Y, X) = F_{\overline{1^p}}(Y, X)$.
- 2) Sei $1 < p < \infty$; X ist genau dann ein $\mathcal{L}_p$ -Raum oder ein $\mathcal{L}_2$ -Raum, wenn für alle Y gilt $F(Y, X) = F_{\overline{1^p}}(Y, X)$.
- 3) Zu $T \in F(X, Y)$ gibt es ein reflexives Z , so daß $T \in F_Z(X, Y)$.

(Einen Beweis findet man in Johnson [1], Theorem 1,2.)

3.5 Definition

Eine Folge (y_n) in E heißt l^p -summierbar, wenn $\sum_n \lambda_n y_n$ für alle $(\lambda_n) \in l^p$ in E konvergiert (vgl. 1.1). Eine Folge (a_n) in E' heißt l^p -gleichmäßig für E , wenn es eine Nullumgebung U in E gibt, so daß $\{(\langle x, a_n \rangle)_n; x \in U\}$

eine beschränkte Teilmenge von l^p ist. Eine Folge (y_n) in E heißt absolut p -summierbar, $1 \leq p < \infty$, wenn

$\sum_n p_U(y_n)^p < \infty$ gilt für alle U aus einer Nullumgebungs-basis $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{A}_E$ von E .

3.6 Anmerkung

Mit dem Satz von Banach-Steinhaus (vgl. Köthe [1], p. 173) folgt sofort: Wenn (y_n) in E l^p -summierbar ist, dann ist $\left\{ \sum_n \lambda_n y_n ; \|(\lambda_n)\|_p \leq 1 \right\}$ eine beschränkte Teilmenge von E .

3.7 Lemma

- a) Sei (a_n) in E' $\overline{l^p}$ -gleichmäßig für E ; dann ist (a_n) $l^{p'}$ -summierbar in E' .
- b) Sei (y_n) in E l^p -summierbar; dann ist (y_n) in E für E' $l^{p'}$ -gleichmäßig (E aufgefaßt als Teilraum von $(E'_\beta)'$).

Beweis:

- a) Unmittelbar aus der Voraussetzung folgt, daß

$$T : E \longrightarrow \overline{l^p}$$

$$x \longmapsto \sum_n \langle x, a_n \rangle e_n$$

eine Abbildung ist ((e_n) sei stets die Standard-Basis von $\overline{l^p}$).

Also ist auch $T' : (\overline{l^p})' \longrightarrow E'_\beta$ eine Abbildung der Darstellung $T' = \sum_n \langle \cdot, e_n \rangle a_n$.

Dies kann man folgendermaßen einsehen:

Man definiert $T_n = \sum_{v=1}^n \langle \cdot, a_v \rangle e_v$ und zeigt mit Hilfe der Hölder-Ungleichung, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} T'_n(y) = T'(y)$ in E'_β

gilt für alle $y \in (\overline{l^p})'$. Mit dem Satz von Banach-Steinhaus (vgl. Köthe [1], p. 173) folgt dann

$$T' = \sum_n \langle \cdot, e_n \rangle a_n.$$

Insbesondere gilt $T'(e_n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und hieraus folgt wegen $(\overline{l^p})' = l^{p'}$ und der Stetigkeit von T' , daß (a_n) $l^{p'}$ -summierbar ist in E'_β .

b) Nach 3.6 ist $B := \left\{ \sum_n \lambda_n y_n ; \|(\lambda_n)\|_p \leq 1 \right\}$ beschränkt in E , also ist B^0 eine Nullumgebung in E'_β .

Sei $p = \infty$: Für $z \in B^0$ und $(\lambda_n) \in l^\infty$, $\|(\lambda_n)\|_\infty \leq 1$, ist

$|\langle z, \sum_n \lambda_n y_n \rangle| \leq 1$. Man wähle eine Folge (λ_n) mit $|\lambda_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß $\lambda_n \langle z, y_n \rangle = |\langle z, y_n \rangle|$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $\sum_n |\langle z, y_n \rangle| \leq 1$.

Sei $p \neq \infty$: Es gilt $|\langle z, \sum_n \lambda_n y_n \rangle| = |\sum_n \lambda_n \langle z, y_n \rangle| \leq 1$ für alle $z \in B^0$ und alle (λ_n) mit $\|(\lambda_n)\|_p \leq 1$. Es folgt $\|(\langle z, y_n \rangle)\|_{p'} \leq 1$ für alle $z \in B^0$, das heißt (y_n) ist $l^{p'}$ -gleichmäßig in E für E'_β .

3.8 Anmerkung

3.7 zeigt insbesondere, daß für gegebenes X die übliche Definition der p -Summierbarkeit, $1 \leq p < \infty$, einer Folge (x_n) in X , nämlich $\sum_n |\langle x_n, a \rangle|^p < \infty$ für alle $a \in X'$, äquivalent ist mit der $l^{p'}$ -Summierbarkeit der Folge (x_n) in X .

3.9 Definition und Satz

Eine Abbildung $T : X \longrightarrow Y$ heißt absolut p -summierend,

$1 \leq p < \infty$, wenn jede p -summierbare Folge (x_n) in X in eine absolut p -summierbare Folge $(T(x_n))_n$ in Y überführt wird.

a) Jedes $T : l^\infty \rightarrow l^p$ mit $1 \leq p \leq 2$ ist absolut 2-summierend.

b) Die Hintereinanderschaltung von zwei absolut 2-summierenden (bzw. absolut-summierenden) Abbildungen ist nuklear.

c) Jedes $T : l^1 \rightarrow l^2$ ist absolut summierend.

(Einen Beweis findet man für a) in Lindenstrauss-Pelczynski [1], Theorem 4.3; für b) in Pietsch [1], Theorem 6 und Pietsch [3], 3.3.5; und für c) in Lindenstrauss-Tzafriri [1], I.2.10.)

3.10 Lemma

Sei $1 \leq p < \infty$; $K \subset l^p$ ist genau dann relativ kompakt, wenn es eine monotone Nullfolge $0 < (d_n)$ gibt, so daß $K \subset \left\{ \sum_n \lambda_n d_n e_n; \sum_n |\lambda_n|^p \leq 1 \right\}$.

(Für eine Verallgemeinerung auf (B)-Räume mit unbedingter Basis vgl. Lang [2], Satz 2.)

Beweis:

" $\Leftarrow$ " Vgl. Wloka [1], p. 198.

" $\Rightarrow$ " $K \subset l^p$ sei relativ kompakt; dann gibt es (vgl.

Wloka [1], p. 198) eine monotone Nullfolge $(d_n^*) > 0$, so daß

$$\sum_{v \in M} |x_v|^p \leq d_n^{*p} \quad \text{für alle } (x_v) \in K.$$

Sei $0 < (\delta_v) \in l^p$ und $\sum_n \delta_n^p = 1$. Man wähle eine monotone

Nullfolge $(\varepsilon_v) > 0$, so daß $(\delta_v^{-1} \varepsilon_v)$ eine monotone Nullfolge ergibt und eine strikt aufsteigende Folge (n_v) in $\mathbb{N} \cup \{0\}$, wobei $n_0 = 1$ und $d_{n_v}^* \leq \varepsilon_v$ für alle $v \in \mathbb{N}$.

Man definiert nun $d_n' = \delta_v^{-1} d_{n_{v-1}}^*$ für alle n mit

$n_{v-1} \leq n < n_v$ und für alle $v \in \mathbb{N}$. Ferner sei für alle

$n \in \mathbb{N}$ $d_n = \sup_{v \geq n} d_v'$; dann ist nach Konstruktion

$(d_n) > 0$ eine monotone Nullfolge.

Sei nun $(x_n) \in K$ gegeben und (λ_n) sei definiert durch

$\lambda_n = \frac{x_n}{d_n}$. Dann ist $(x_n) = \sum_n \lambda_n d_n e_n$, und es gilt

$$\begin{aligned} \sum_v |\lambda_v|^p &= \sum_v \left| \frac{x_v}{d_v} \right|^p \leq \sum_{v \geq n_0} \frac{|x_v|^p}{d_{n_0}^{1,p}} + \sum_{v \geq n_1} \frac{|x_v|^p}{d_{n_1}^{1,p}} + \sum_{v \geq n_2} \frac{|x_v|^p}{d_{n_2}^{1,p}} + \dots \\ &\leq \sum_{v \geq n_0} \delta_1^p \frac{|x_v|^p}{d_{n_0}^{*p}} + \sum_{v \geq n_1} \delta_2^p \frac{|x_v|^p}{d_{n_1}^{*p}} + \dots \leq 1. \end{aligned}$$

3.11 Satz

Eine Abbildung $T : E \longrightarrow F$ ist genau dann eine $(\overline{l^p\text{-S}})$ -

Abbildung, wenn T eine Darstellung $T = \sum_n d_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n$

hat, wobei $0 < (d_n) \in c_0$, (a_n) l^p -gleichmäßig in E' und (y_n) l^p -summierbar ist in F .

(Für eine Verallgemeinerung auf (B) -Räume mit unbedingter Basis sei auf Lang [2], Satz 3 verwiesen.)

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Für $p = \infty$ benutzt man zum Beweis Theorem 2.18 aus Randtke [1]. Sei nun $p \neq \infty$.

Es sei $T = \psi_2 \circ \psi_1$, wobei $\psi_1 : E \longrightarrow l^p$ und

$\psi_2 : l^p \rightarrow F$ kompakt sind. Dann gibt es eine Nullumgebung U in E , so daß $\psi_1(U)$ in l^p relativ kompakt ist.

Nach 3.10 gibt es eine Nullfolge $0 < (d_n)$, so daß

$\psi_1(U) \subset \left\{ \sum_n \lambda_n d_n e_n ; \sum_n |\lambda_n|^p \leq 1 \right\}$. Da (e_n) eine Basis von l^p ist und U absorbant in E , ist für $x \in E$ durch

$$\langle x, a_n \rangle = \rho \lambda_n, \text{ falls } x = \rho z \text{ mit } z \in U \text{ und } \psi_1(z) = \sum_v \lambda_v d_v e_v$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ein a_n aus E' erklärt. Dies rechnet man

leicht nach und ebenso, daß (a_n) l^p -gleichmäßig in E' ist.

Damit hat ψ_1 eine Darstellung $\psi_1 = \sum_n d_n \langle \cdot, a_n \rangle e_n$.

Man setzt nun $\psi_2(e_n) = y_n$; dann ist (y_n) wegen der Stetigkeit von ψ_2 und der l^p -Summierbarkeit von (e_n) in l^p ebenfalls in F l^p -summierbar und T hat die gewünschte

Darstellung $T = \sum_n d_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n$.

" $\Leftarrow$ " Es habe umgekehrt T eine Darstellung $T = \sum_n d_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n$, wobei $0 < (d_n) \in c_0$, (a_n) eine l^p -gleichmäßige Folge in E' und (y_n) eine l^p -summierbare Folge in F ist.

Man definiert nun

$$\psi_1 : E \rightarrow \overline{l^p} \text{ durch } x \mapsto (d_n^{1/2} \langle x, a_n \rangle)_n$$

$$\psi_2 : \overline{l^p} \rightarrow F \text{ durch } (\xi_n) \mapsto \sum d_n^{1/2} \xi_n y_n.$$

ψ_1 und ψ_2 sind kompakte Abbildungen, da die Diagonal-

abbildung $D : \overline{l^p} \rightarrow \overline{l^p}$, definiert durch $(\xi_v) \mapsto (d_v^{1/2} \xi_v)$

kompakt ist und die Zuordnungen $x \mapsto (\langle x, a_n \rangle)_n$ bzw.

$(\xi_n) \mapsto \sum_n \xi_n y_n$ von E in l^p bzw. von l^p in F Abbildungen liefern wegen der l^p -Gleichmäßigkeit von (a_n) in

E' bzw. der l^p -Summierbarkeit von (y_n) in F . Überdies gilt

$T = \psi_2 \circ \psi_1$; T ist also eine $(\overline{l^p}\text{-S})$ -Abbildung.

Anmerkung: Der Beweis von 3.11 zeigt, daß auch eine kompakte Abbildung $T : E \longrightarrow \overline{l^p}$ eine $(\overline{l^p}\text{-S})$ -Abbildung ist.

3.12 Satz

Eine Abbildung $T : E \longrightarrow F$ ist genau dann p -nuklear, $1 \leq p < \infty$, wenn T kompakt über l^p faktorisiert ist gemäß $T = T_2 \circ T_1$, wobei zusätzlich für eine geeignete Nullumgebung $U \subset E$ und ein geeignetes $u \in l^p$ gilt $T_1(U) \subset N(u)$. (Hierbei ist $N(u)$ die normale Hülle von $u \in l^p$; zur Terminologie vgl. Köthe [1], p. 410.)

Beweis:

Der Beweis ist in vollständiger Analogie zu den Methoden des Beweises von 3.11 zu führen.

3.13 Lemma

$T : E \longrightarrow F$ sei eine $(\overline{l^p}\text{-S})$ -Abbildung; dann ist

$T' : E'_\beta \longrightarrow F'_\beta$ eine $(\overline{l^{p'}}\text{-S})$ -Abbildung.

Beweis:

Nach 3.11 hat T eine Darstellung $T = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n$, wobei $0 < (\lambda_n) \in c_0$, (a_n) l^p -gleichmäßig in E' für E und (y_n) l^p -summierbar ist in F . Man setzt nun $\lambda'_n = \sqrt{\lambda_n}$, $a'_n = \lambda'_n a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach 3.7 ist (a'_n) $l^{p'}$ -summierbar in E'_β und (y_n) $l^{p'}$ -gleichmäßig in F für F'_β . Insbesondere folgt nun für $T' : E'_\beta \longrightarrow F'_\beta$ die Darstellung $T' = \sum_n \lambda'_n \langle \cdot, y_n \rangle a'_n$ und nach 3.11 ist T' eine $(\overline{l^{p'}}\text{-S})$ -Abbildung.

3.14 Beispiele

- 1) Sei $1 \leq p < \infty$; jeder p -nukleare Raum ist ein $(l^p\text{-}S)$ -Raum. Dies folgt aus der Tatsache, daß jede p -nukleare Abbildung eine $(l^p\text{-}S)$ -Abbildung ist, was unmittelbar aus 3.11 folgt. (Jedes $(\lambda_n) \in l^p$ läßt sich zerlegen in $(\lambda_n) = (\varepsilon_n \lambda'_n)$ mit $0 < (\varepsilon_n) \in c_0$ und $(\lambda'_n) \in l^p$.) Nach Anmerkung 2) hinter 1.1 folgt also auch, daß ein p -nuklearer Raum ein $(l^q\text{-}S)$ -Raum ist für jedes q mit $p \leq q < \infty$.
- 2) Jeder nukleare Raum ist ein $(l^p\text{-}S)$ -Raum für alle p . Dies ist für $p \neq \infty$ klar nach 1). Sei $p = \infty$: Es genügt zu zeigen, daß eine nukleare Abbildung $T : X \longrightarrow Y$, $T = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n$, eine $(c_0\text{-}S)$ -Abbildung ist. Dies folgt unmittelbar aus 3.11 mit der Darstellung $T = \sum_n \varepsilon_n \langle \cdot, a_n \rangle y'_n$ mit $(y'_n) = (\lambda'_n y_n)$ und $(\lambda_n) = (\varepsilon_n \lambda'_n)$, wobei $0 < (\varepsilon_n) \in c_0$ und $(\lambda'_n) \in l^1$.
- 3) $\lambda^{(p)}(P)$, $1 \leq p < \infty$, sei ein gestufter Raum p -ter Ordnung im Sinne von Köthe [1], p. 423, und P sei eine Folge von Folgen $(a_n) > 0$. $\lambda^{(p)}(P)$ läßt sich auffassen als projektiver Limes (der die Bedingung 2) in 2.10 erfüllt) von Folgenräumen, die zu l^p normisomorph sind. Wenn $\lambda^{(p)}(P)$ überdies ein (S) -Raum ist, was genau dann eintritt, wenn es zu jeder Folge $(a_n) \in P$ eine Folge $(b_n) \in P$ gibt, so daß $(a_n b_n^{-1}) \in c_0$, dann ist $\lambda^{(p)}(P)$ nach 2.10 ein $(l^p\text{-}S)$ -Raum. Folglich gibt es nichtnukleare $(l^p\text{-}S)$ -Räume, $1 \leq p < \infty$, denn es gibt nichtnukleare

(S)-Räume $\lambda^{(p)}(P)$.

- 4) 3.16 wird weitere wichtige Beispiele von $\overline{(l^p-S)}$ -Räumen aufführen, nämlich X_S , wenn X ein $\mathcal{L}_p$ -Raum ist. Darunter befindet sich mit $(c_0)_S$ auch ein nichtnuklearer (c_0-S) -Raum.

Für den Beweis des nächsten Satzes benötigen wir noch die folgenden Definitionen und Zusammenhänge:

Zu einer Folge (X_n) von (B)-Räumen sei

$$\sum_{l^p}(X_n) := \{ (x_n); x_n \in X_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } (\|x_n\|) \in \overline{l^p} \}.$$

$\sum_{l^p}(X_n)$, versehen mit der Norm $\|(\|x_n\|)_n\|_p$, ist ein

(B)-Raum. Nach einem bekannten Satz ist eine Menge

$K \subset \sum_{l^p}(X_n)$ genau dann relativ kompakt, wenn $P^{(n)}(K)$ in

X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ relativ kompakt ist und wenn $Q^{(n)}((x_v)_v)$ gleichmäßig auf K gegen 0 konvergiert; hierbei ist $P^{(n)}$

die kanonische Projektion auf die n-te Komponente,

$P^{(n)}((x_v)_v) = (0, \dots, 0, x_n, 0, \dots)$ und $Q^{(n)}$ ist definiert

durch $Q^{(n)}((x_v)_v) = (0, \dots, 0, x_n, x_{n+1}, \dots)$ (Zum Beweis vergleiche man Wloka [1], p. 198).

Ferner gilt $\sum_{l^p}(\overline{l^p}) \underset{\text{norm}}{\cong} \overline{l^p}$.

Einen Beweis für $p \neq \infty$ findet man in Singer [1], p. 542, für $p = \infty$ ist die Behauptung nicht schwer einzusehen.

3.15 Satz

a) (E_n) sei eine Folge von $\overline{(l^p-S)}$ -Räumen; dann ist auch

$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n$ ein $(\overline{l^p})$ -Raum.

b) $(E_l)_{l \in I}$ sei eine Familie von $(\overline{l^p})$ -Räumen; dann ist auch $\prod_{l \in I} E_l$ ein $(\overline{l^p})$ -Raum.

Beweis:

a) Es sei eine Abbildung $T : \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n \rightarrow X$ gegeben; dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $T^{(n)} = T|_{E_n}$ eine $(\overline{l^p})$ -Abbildung und

nach 3.11 hat $T^{(n)}$ die Darstellung

$T^{(n)} = \sum_{\nu} d_{\nu}^{(n)} \langle \cdot, \hat{a}_{\nu}^{(n)} \rangle y_{\nu}^{(n)}$, wobei $0 < (d_{\nu}^{(n)})_{\nu} \in c_0$, $(\hat{a}_{\nu}^{(n)})_{\nu}$ l^p -gleichmäßig in E' und $(y_{\nu}^{(n)})_{\nu}$ l^p -summierbar

ist in X für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar läßt sich in dieser

Darstellung zusätzlich erreichen (durch Multiplikation der

$(\hat{a}_{\nu}^{(n)})_{\nu}$ mit einem geeigneten Skalar $\rho^{(n)}$), daß

$(\sup_{\nu} d_{\nu}^{(n)})_n \in c_0$ und $\|\sum_{\nu} \lambda_{\nu} y_{\nu}^{(n)}\| \leq 2^{-n} M$ für alle $n \in \mathbb{N}$

und alle $(\lambda_{\nu}) \in l^p$ mit $\|(\lambda_{\nu})\|_p \leq 1$ und eine feste Kon-

stante $M > 0$. Die l^p -gleichmäßigen Funktionalfolgen $(\hat{a}_{\nu}^{(n)})$

werden l^p -gleichmäßig auf $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n$ fortgesetzt mit den

Funktionalfolgen $(a_{\nu}^{(n)})$ durch die Vorschrift

$$a_{\nu}^{(n)}|_{E_n} = \hat{a}_{\nu}^{(n)}, \quad a_{\nu}^{(n)}|_{\bigoplus_{m \neq n} E_m} = 0.$$

Dann gilt $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{\nu} d_{\nu}^{(n)} \langle \cdot, a_{\nu}^{(n)} \rangle y_{\nu}^{(n)})$ und T wird nun

durch $T = T_2 \circ T_1$ mit kompaktem T_1 über $\sum_{l^p} (\overline{l^p})$

faktorisiert:

$$\begin{array}{ccc} T_1 : \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n & \longrightarrow & \sum_{l^p} (\overline{l^p}) \\ x & \longmapsto & ((d_{\nu}^{(n)} \langle x, a_{\nu}^{(n)} \rangle)_{\nu})_n \end{array}$$

$$T_2 : \sum_{\overline{1^P}} (\overline{1^P}) \longrightarrow x$$

$$((\xi_v^{(n)})_v)_n \longmapsto \sum_m (\sum_v \xi_v^{(n)} y_v^{(n)}) .$$

T_1 ist offenbar linear; es wird jetzt gezeigt, daß T_1 kompakt ist. Nach Voraussetzung gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$

in E_n eine Nullumgebung U_n der Eigenschaft, daß

$\{(\langle x, a_v^{(n)} \rangle) ; x \in U_n\}$ in der Einheitskugel von l^p

liegt. Man setze $U := \bigcap U_n$; $T_1(U)$ ist relativ kompakt in $\sum_{\overline{1^P}} (\overline{1^P})$, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$P^{(n)}(T_1(U)) \subset \{(d_v^{(n)} \lambda_v) ; \|(\lambda_v)\|_p \leq 1\} \text{ und } (d_v^{(n)}) \in c_0.$$

Sei nun $x \in U$; dann gibt es ein endliches $J \subset \mathbb{N}$ und

$$x_j \in U_j \text{ mit } (*) \ x = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j, \sum_{j \in J} |\lambda_j| \leq 1, \text{ und es gilt}$$

$$\|T_1(x)\| = (\sum_{j \in J} \|(\lambda_j d_v^{(j)} \langle x_j, a_v^{(j)} \rangle)_v\|_p^p)^{1/p}; \text{ hieraus er-}$$

kennt man, daß $Q^{(n)}(T_1(x))$ gleichmäßig in $x \in U$ gegen 0

konvergiert, denn für alle $(*)$ -Darstellungen der $x \in U$ ist

$$\text{ja } \|(\langle x_j, a_v^{(j)} \rangle)_v\|_p \leq 1, \sum_{j \in J} |\lambda_j| \leq 1, \text{ und überdies gilt } (\sup_v d_v^{(n)})_n \in c_0.$$

Zu zeigen bleibt, daß T_2 stetig ist. Sei $\|((\xi_v^{(n)})_v)_n\| \leq 1$;

dann ist $\|(\xi_v^{(n)})_v\|_p \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit gilt

$$\|T_2((\xi_v^{(n)})_v)_n\| \leq M. \quad T = T_2 \circ T_1 \text{ folgt aus}$$

$$T = \sum_m (\sum_v d_v^{(n)} \langle \cdot, a_v^{(n)} \rangle y_v^{(n)}) .$$

T_1 ist eine kompakte Abbildung in $\sum_{\overline{1^P}} (\overline{1^P}) \underset{\text{norm}}{\cong} \overline{1^P}$, und

aus der Anmerkung nach 3.11 folgt, daß damit T_1 selbst schon

die in 3.11 beschriebene Darstellung hat, und damit, wie-

derum nach 3.11, eine $(\overline{1^P}$ -S)-Abbildung ist. Also ist auch

T eine $(\overline{1^P}\text{-S})$ -Abbildung und nach 2.6 ist $\bigoplus_n E_n$ ein $(\overline{1^P}\text{-S})$ -Raum.

b) $T : \prod_{i \in I} E_i \rightarrow X$ sei stetig. T besitzt eine Faktorisierung $T = T_2 \circ T_1$, $T_1 : \prod_{i \in I} E_i \rightarrow \prod_{j \in J} E_j$,

$T_2 : \prod_{j \in J} E_j \rightarrow X$, wobei $J \subset I$ und $|J| < \infty$ (vgl. Diestel-Morris [1], Lemma 1). Aus 3.15 a) und 2.6 folgt, daß

$\prod_{i \in I} E_i$ ein $(\overline{1^P}\text{-S})$ -Raum ist.

3.16 Satz

a) X sei ein $\mathcal{L}_p$ -Raum; dann ist X_S ein $(\overline{1^P}\text{-S})$ -Raum.

b) X_S sei ein $(\overline{1^P}\text{-S})$ -Raum; für $p \in \{1, \infty\}$ ist dann X ein $\mathcal{L}_p$ -Raum, für $1 < p < \infty$ ist X ein $\mathcal{L}_2$ -Raum oder ein $\mathcal{L}_p$ -Raum.

Anmerkung: Nach 3.3 ist $(\overline{1^P})_S$ ein $(\overline{1^P}\text{-S})$ -Raum. Dies kann man aber auch leicht direkt einsehen, indem man die Adjungierte einer kompakten Abbildung $T : \overline{1^P} \rightarrow X$ betrachtet und die Anmerkung nach 3.11 anwendet.

Beweis:

a) X sei ein $\mathcal{L}_p$ -Raum und $T : X \rightarrow Y$ sei kompakt; X' ist nach 3.3 ein $\mathcal{L}_p$ -Raum, hat also die A.E. (Lindenstrauss-Tzafriri [1], II, 5.9), und nach 1.9 gilt

$T \in F(X, Y)$ (vgl. Definition vor 3.4). Nach 3.4 gibt es ein reflexives Z , so daß $T \in F_Z(X, Y)$; es sei etwa

$T = T_2 \circ T_1$, $T_1 \in F(X, Z)$, $T_2 \in F(Z, Y)$. Dann ist $T_1' : Z' \rightarrow X'$ kompakt, und insbesondere gilt $T_1' \in F(Z', X')$ (vgl. 1.7).

Da X' ein $\mathcal{L}_p$ -Raum ist, folgt mit 3.4, daß T_1' kompakt

faktorisiert über $\overline{1^{p'}}$. T_1' ist also eine $(\overline{1^{p'}}-S)$ -Abbildung (vgl. Anmerkung nach 3.11) und habe die Darstellung $T_1' = \sum_n d_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n$ mit (d_n) , (a_n) und (y_n) gemäß 3.11. T_1' läßt sich nun wie folgt zerlegen:

$$T_1' = \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1,$$

$$\begin{aligned} \psi_1 : Z' &\longrightarrow \overline{1^{p'}} & \psi_2 : \overline{1^{p'}} &\longrightarrow \overline{1^{p'}} \\ x &\longmapsto (d_n^{1/2} \langle x, a_n \rangle) & (\lambda_n) &\longmapsto (d_n^{1/2} \lambda_n) \end{aligned}$$

$$\psi_3 : \overline{1^{p'}} \longrightarrow X'$$

$$(\lambda_n) \longmapsto \sum_n d_n^{1/2} \lambda_n y_n, \text{ wobei } \psi_1, \psi_2, \psi_3 \text{ offenbar}$$

kompakte Abbildungen sind.

Für $p \neq \infty$ faktorisiert also $T_1''|_X$ kompakt über $\overline{1^p}$.

Für $p = \infty$ ist $\psi_2' : l^\infty \longrightarrow l^\infty$ gerade die Zuordnung $(\lambda_n) \longmapsto (d_n^{1/2} \lambda_n)$, es gilt also $\psi_2'(l^\infty) \subset c_0$. Mithin läßt sich auch in diesem Fall $T_1''|_X = T_1$ kompakt über c_0

faktorisieren. T selbst ist also eine $(\overline{1^p}-S)$ -Abbildung, und mit 2.5, 2.6 folgt, daß X_S ein $(\overline{1^p}-S)$ -Raum ist.

b) X_S sei ein $(\overline{1^p}-S)$ -Raum, und es sei $T \in F(Y, X')$ für ein beliebig gegebenes Y . Nach 3.4 gibt es ein reflexives Z , so daß $T \in F_Z(Y, X')$; es sei etwa $T = T_2 \circ T_1$ mit $T_1 \in F(Y, Z)$ und $T_2 \in F(Z, X')$. Dann ist $T_2'|_X : X \longrightarrow Z'$ kompakt und nach Voraussetzung folgt mit 2.5 und 2.6, daß $T_2'|_X$ eine $(\overline{1^p}-S)$ -Abbildung ist. Wieder läßt sich $T_2'|_X$ nach dem Vorbild von a) wie folgt kompakt zerlegen:

$$T_2'|_X = \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1, \text{ wobei } \psi_1 : X \longrightarrow \overline{1^p} \text{ kompakt ist,}$$

$$\psi_2 : \overline{1^p} \longrightarrow \overline{1^p} \text{ definiert ist durch } \psi_2(\xi_v) = (d_v \xi_v)$$

für ein geeignetes $0 < (d_v) \in c_0$, und $\psi_3 : \overline{l^p} \rightarrow Z'$ ebenfalls kompakt ist. Wie in a) faktorisiert für $p \neq 1$ $T = (T_2'|_X)' : Z \rightarrow X'$ kompakt über $l^{p'}$; für $p = 1$ erlaubt die Darstellung $T = \psi_1 \circ \psi_2' \circ \psi_3'$ mit $\psi_2'(l^\infty) \subset c_0$ analog zu a) eine kompakte Faktorisierung von T über c_0 . Nach 3.4 ist nun X' für $p' \in \{1, \infty\}$ ein $\mathcal{L}_p$ -Raum, und mit 3.3 folgt, daß X ein $\mathcal{L}_p$ -Raum ist. Für $1 < p < \infty$ folgt mit der gleichen Schlußweise, daß X ein $\mathcal{L}_p$ -Raum oder ein $\mathcal{L}_2$ -Raum ist.

Für alle p sei $\mathcal{R}^{(p)}$ die Klasse der $(\overline{l^p}$ -S)-Räume und $\mathcal{N}$ sei die Klasse der nuklearen Räume. Mit diesen Bezeichnungen gilt

3.17 Satz

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} \mathcal{R}^{(p)} = \mathcal{R}^{(\infty)} \cap \mathcal{R}^{(p)} \text{ für } 1 \leq p \leq 2 \\ &= \mathcal{R}^{(1)} \cap \mathcal{R}^{(2)} \end{aligned}$$

Beweis:

$\mathcal{N} \subset \mathcal{R}^{(p)}$ für alle p wurde schon in 3.14 2) gezeigt.

Es sei nun $E \in \mathcal{R}^{(\infty)} \cap \mathcal{R}^{(p)}$ für $1 \leq p \leq 2$, und

$T : E \rightarrow X$ sei stetig für ein beliebig gegebenes X .

Durch eine wiederholte Anwendung von 2.6 konstruiert man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{id} & E & \xrightarrow{id} & E & \xrightarrow{id} & E & \xrightarrow{T} & X \\ T_4 \downarrow & & T_3 \downarrow & & T_2 \downarrow & & T_1 \downarrow & \nearrow & \\ l^\infty & \longrightarrow & l^p & \longrightarrow & l^\infty & \longrightarrow & l^p & & \end{array}$$

(Aus der Darstellung einer $(l^\infty\text{-}S)$ -Abbildung gemäß 3.11 folgt, daß jede $(l^\infty\text{-}S)$ -Abbildung auch eine kompakte Faktorisierung über l^∞ besitzt.)

T_1, T_2, T_3, T_4 , sind kompakte Abbildungen, so daß die Anwendbarkeit von 2.6 immer gesichert ist. Nach 3.9 ist T eine nukleare Abbildung, und nach 1.3 gilt $E \in \mathcal{N}$.

Für $E \in \mathcal{R}^{(1)} \cap \mathcal{R}^{(2)}$ wird in vollkommen analoger Weise geschlossen.

3.18 Satz

- a) $\mathcal{R}^{(2)} \not\subseteq \mathcal{R}^{(p)}$ für alle $1 < p < \infty$, $p \neq 2$.
- b) $\mathcal{R}^{(p)} \cap \mathcal{R}^{(q)} = \mathcal{R}^{(2)}$ für $q \leq 2 \leq p$ und $p, q \in]1, \infty[$.
- c) $\mathcal{R}^{(p)}$ und $\mathcal{R}^{(q)}$ sind genau dann unvergleichbar, wenn gilt: $\{p, q\} \cap \{1, \infty\} \neq \emptyset$ oder $\{p, q\} \cap \{2\} = \emptyset$.

Beweis:

a) Sei $E \in \mathcal{R}^{(2)}$ und $T : E \longrightarrow X$ sei stetig für ein beliebig gegebenes X . Wie im Beweis von 3.16 a) konstruiert man ein kommutatives Diagramm aus kompakten Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & X \\ \psi_1 \downarrow & & \uparrow \psi_3 \\ l^2 & \xrightarrow{\psi_2} & l^2 \end{array} .$$

Nach Pietsch [2], Satz 3 läßt sich ψ_2 über l^p faktorisieren für $1 < p < \infty$; also ist T eine $(l^p\text{-}S)$ -Abbildung, und nach 2.6 gilt $E \in \mathcal{R}^{(p)}$ für $1 < p < \infty$. Wäre $\mathcal{R}^{(2)} = \mathcal{R}^{(p)}$ für $p \neq 2$ und $1 < p < \infty$, so wäre nach 3.16 l^p_S ein $(l^2\text{-}S)$ -Raum und somit nach 3.16 l^p ein $\mathcal{L}_2$ -Raum, das

heißt l^p wäre isomorph zu einem Hilbert-Raum (Lindenstrauss-Tzafriri [1] II, 5). Widerspruch!

b) Die Behauptung folgt im wesentlichen aus Lindenstrauss-Pelczynski [1], Theorem 5.2: Sei X ein $\mathcal{L}_p$ -Raum ($2 \leq p \leq \infty$) und Y ein $\mathcal{L}_r$ -Raum ($1 \leq r \leq 2$); dann läßt sich jede Abbildung $T : X \longrightarrow Y$ über einen Hilbert-Raum faktorisieren. p und q seien wie vorausgesetzt.

$\mathcal{R}^{(2)} \subset \mathcal{R}^{(p)} \cap \mathcal{R}^{(q)}$ folgt aus a). Sei nun $E \in \mathcal{R}^{(p)} \cap \mathcal{R}^{(q)}$ und $T : E \longrightarrow X$ sei stetig für ein beliebig gegebenes X . Wie im Beweis von 3.17 wird das folgende kommutative Diagramm mit kompakten Abbildungen π_1 und π_2 konstruiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{\text{id}} & E & \xrightarrow{T} & X \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow & \nearrow \pi_2 & \\
 l^p & \xrightarrow{\varphi} & l^q & &
 \end{array}$$

l^p ist ein $\mathcal{L}_p$ -Raum und l^q ein $\mathcal{L}_q$ -Raum, und beide sind überdies separabel; nach dem zitierten Satz ist also φ über l^2 faktorisierbar, und wegen der Kompaktheit von π_1 und π_2 folgt: T ist eine $(l^2\text{-S})$ -Abbildung, und mit 2.6 gilt $E \in \mathcal{R}^{(2)}$.

c) Grundlegend für den Beweis von c) sind außer a) und b) und 3.16 noch die beiden folgenden Theoreme:

I) Sei $2 < p < q$; dann kann l^p nicht isomorph in $L_q[0,1]$ eingebettet werden.

(Lindenstrauss-Tzafriri [1], p. 134 ff)

II) Sei $|p - 2| < |q - 2|$ oder $(p - 2)(q - 2) < 0$; dann

ist kein unendlich dimensionaler $L_q(\mu)$ -Raum isomorph zu einem Teilraum eines $L_p(\nu)$ -Raumes.

(Lindenstrauss-Tzafriri [1], p. 133)

" $\Rightarrow$ " $\mathcal{R}^{(p)}$ und $\mathcal{R}^{(q)}$ seien unvergleichbar; daraus folgt natürlich $p \neq q$. Wäre nun $\{1, \infty\} \cap \{p, q\} = \emptyset$ und $\{p, q\} \cap \{2\} \neq \emptyset$, so wäre o. B. d. A. etwa $p = 2$ und $1 < q < \infty$. Aus a) würde folgen $\mathcal{R}^{(p)} \subset \mathcal{R}^{(q)}$. Widerspruch!

" $\Leftarrow$ " Sei $\{p, q\} \cap \{1, \infty\} \neq \emptyset$ oder $\{p, q\} \cap \{2\} = \emptyset$.

Wir gehen nun die einzelnen Fälle durch:

1a) $\mathcal{R}^{(\infty)}$ und $\mathcal{R}^{(p)}$ sind unvergleichbar für $1 \leq p < \infty$:

Falls $\mathcal{R}^{(\infty)} \subset \mathcal{R}^{(p)}$, so folgt mit 3.16, daß $(c_o)_S$ ein (l^p-S) -Raum ist und damit c_o ein $\mathcal{L}_p$ -Raum oder ein $\mathcal{L}_2$ -Raum. Für $1 < p < \infty$ ist das ein Widerspruch, da alle diese Räume reflexiv sind. Wäre $(c_o)_S \in \mathcal{R}^{(1)}$, so ließe sich mit 2.6 wie in 3.17 das folgende kommutative Diagramm für eine beliebig gegebene Abbildung $T : (c_o)_S \rightarrow X$ konstruieren:

$$\begin{array}{ccccccc} (c_o)_S & \xrightarrow{\text{id}} & (c_o)_S & \xrightarrow{\text{id}} & (c_o)_S & \xrightarrow{\text{id}} & (c_o)_S \xrightarrow{T} X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \nearrow \\ c_o & \longrightarrow & l^1 & \longrightarrow & c_o & \longrightarrow & l^1 \end{array}$$

Da jede Abbildung von c_o in l^1 absolut 2-summierend ist (Lindenstrauss-Tzafriri [1], I.2.11), folgt aus 3.9, daß T nuklear ist, also gilt nach 1.3 $(c_o)_S \in \mathcal{N}$.

Widerspruch! Dann wäre nämlich $(c_o)_N = (c_o)_S$, was nach 1.4 unmöglich ist.

Falls $\mathcal{R}^{(p)} \subset \mathcal{R}^{(\infty)}$, so folgt mit 3.18 a) für $p \neq 1$
 $\mathcal{R}^{(2)} \subset \mathcal{R}^{(\infty)}$, also $\mathcal{N} = \mathcal{R}^{(2)} \cap \mathcal{R}^{(\infty)} = \mathcal{R}^{(2)}$,
 was nach 3.14 3) falsch ist. Für $p = 1$ schließt man ana-
 log mit 3.17 und 3.14 3).

1b) $\mathcal{R}^{(1)}$ und $\mathcal{R}^{(p)}$ sind unvergleichbar für $1 < p \leq \infty$:
 Aus 1a) folgt, daß $\mathcal{R}^{(1)}$ und $\mathcal{R}^{(\infty)}$ unvergleichbar sind.
 Wäre $\mathcal{R}^{(1)} \subset \mathcal{R}^{(p)}$ für $1 < p < \infty$, so folgt mit 3.16,
 daß l^1 ein $\mathcal{L}_p$ -Raum oder ein $\mathcal{L}_2$ -Raum ist für $1 < p < \infty$;
 l^1 wäre also reflexiv. Widerspruch!

Wäre umgekehrt für $1 < p < \infty$ $\mathcal{R}^{(p)} \subset \mathcal{R}^{(1)}$, so folgt
 mit 3.18 a) und 3.17 $\mathcal{R}^{(2)} = \mathcal{R}^{(1)} \cap \mathcal{R}^{(2)} = \mathcal{N}$, was
 nach 3.14 3) falsch ist.

2a) $\mathcal{R}^{(p)}$ und $\mathcal{R}^{(q)}$ sind unvergleichbar für
 $1 < p < 2 < q < \infty$: Das ergibt sich unmittelbar aus 3.18 a)
 und 3.18 b).

2b) $\mathcal{R}^{(p)}$ und $\mathcal{R}^{(q)}$ sind unvergleichbar für $2 < p < q < \infty$:
 Wäre $\mathcal{R}^{(q)} \subset \mathcal{R}^{(p)}$, so wäre nach 3.16 l^q ein $\mathcal{L}_p$ -Raum
 (l^q ist sicher kein $\mathcal{L}_2$ -Raum, das heißt nicht isomorph zu
 einem Hilbert-Raum.). Mit 3.3 a) ergibt sich ein Widerspruch
 zu II). Wäre $\mathcal{R}^{(p)} \subset \mathcal{R}^{(q)}$, so wäre nach 3.16 l^p ein
 $\mathcal{L}_q$ -Raum und nach 3.3 a) ließe sich l^p in einen Raum
 $\mathcal{L}_q(\mu)$ isomorph einbetten. Da l^p separabel ist, so ließe
 sich nach Lindenstrauss-Tzafriri [1], II, 1.2 l^p sogar
 in $\mathcal{L}_q[0,1]$ einbetten. Widerspruch zu I)!

2c) $\mathcal{R}^{(p)}$ und $\mathcal{R}^{(q)}$ sind unvergleichbar für $1 < p < q < 2$:

Wäre $\mathcal{R}^{(p)} \subset \mathcal{R}^{(q)}$, dann wäre nach 3.16 (vgl. 2b)) l^p ein $\mathcal{L}_q$ -Raum und somit nach 3.3 $l^{p'}$ ein $\mathcal{L}_{q'}$ -Raum. Wegen $1 < p < q < 2$ ist dann $2 < q' < p' < \infty$, und mit 3.3 ergibt sich ein Widerspruch zu II).
Wäre umgekehrt $\mathcal{R}^{(q)} \subset \mathcal{R}^{(p)}$, dann wäre nach 3.16 l^q ein $\mathcal{L}_p$ -Raum und $l^{q'}$ ein $\mathcal{L}_{p'}$ -Raum nach 3.3. Mit $2 < q' < p'$ ergibt sich analog zu 2b) ein Widerspruch zu I).

3.19 Definition

$\mathcal{K}$ sei eine Klasse lokalkonvexer Räume. $\mathcal{F}$ heißt universell für $\mathcal{K}$, wenn für jedes $E \in \mathcal{K}$ eine Indexmenge I existiert, so daß eine Einbettung (topologische Isomorphie aufs Bild) $E \hookrightarrow F^I$ existiert.

Unter den $(\overline{l^p})$ -Räumen spielt der $(\overline{l^\infty})$ -S-Raum eine Sonderrolle; jeder (S)-Raum läßt sich in einen $(\overline{l^\infty})$ -S-Raum einbetten, was für (l^p) -S-Räume mit $1 \leq p < \infty$ falsch ist. Sonst wäre nämlich nach 2.10 l^p ($1 \leq p < \infty$) universell für die Klasse der (S)-Räume, was nach Randtke [2] nicht richtig ist.

3.20 Satz

Jeder (S)-Raum läßt sich in einen $(\overline{l^\infty})$ -S-Raum einbetten.

Beweis:

Nach Jarchow [1] ist c_0 universell für die Klasse der (S)-Räume. Aus 3.16 und 3.15 folgt, daß $(c_0)_S^I$ ein $(\overline{l^\infty})$ -S-Raum

ist für alle Indexmengen I . $(E, \mathcal{T})$ sei ein (S) -Raum; nach Swart [1], 4.7 und 4.8 folgt aus der Existenz einer Einbettung $(E, \mathcal{T}) \longrightarrow c_0^I$ die Existenz einer Einbettung in $(c_0)_S^I$ (wegen $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}$) und damit die Behauptung.

Anmerkung: Zusätzlich wollen wir noch für $F := (c_0)_S^I$ die Existenz einer Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_F$ beweisen, so daß für alle $U \in \mathcal{U}_0$ gilt $\widetilde{F}_U \stackrel{\text{norm}}{\approx} c_0$.

Es gilt $(c_0)_S^I = (c_0^I)_S$ (vgl. Swart [1], Kap. 4), also gibt es nach 1.4 zu einer gegebenen Nullumgebung U in F eine Nullfolge (z_n) in F'_{V_0} für eine geeignete Nullumgebung V in F , so daß $\{z_n; n \in \mathbb{N}\}^0 \subset U$. Da (z_n) Nullfolge in $(\bigoplus_I l^1)_{V_0}$ ist, verschwindet (z_n) , $z_n = (z_n^{(\ell)})_{\ell \in I}$, auf fast allen Komponenten $\ell \in I$. Sei $J \subset I$, $|J| < \infty$, die Teilmenge von I mit der Eigenschaft $z_n^{(\ell)} \neq (0)$ für $\ell \in J$ und wenigstens ein $n \in \mathbb{N}$ ((0) sei die konstante Nullfolge). Dann ist für alle $\ell \in J$ $\overline{\{z_n^{(\ell)}; n \in \mathbb{N}\}}$ kompakt in l^1 , und aus 3.10 folgt für $p = 1$ die Existenz einer Nullfolge $0 < (d_n^{(\ell)}) \in c_0$, für die nach 1.6 gilt:

$$\overline{\{z_n^{(\ell)}; n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\{d_n^{(\ell)} e_n; n \in \mathbb{N}\}}$$

Man setzt nun $z_n^{*(\ell)} = \begin{cases} (0) & \ell \notin J \\ d_n^{(\ell)} e_n & \ell \in J \end{cases}$.

Dann gilt $V^* := \{z_n^*; n \in \mathbb{N}\}^0 \subset U$. Vermittels $\psi: F_{V^*} \rightarrow c_0$, definiert durch $\psi(x) = (\langle x, z_n^* \rangle)_n$, wird eine Normisomorphie von F_{V^*} in c_0 definiert. Zu (z_n^*) läßt sich eine Folge

(x_n) in F_{V*} konstruieren, daß

$$\langle x_n, z_m^* \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

gilt, denn (z_n^*) ist eine topologisch freie Folge. Es folgt insbesondere, da dann $\psi(F_{V*})$ alle finiten Vektoren aus c_0 enthält, $\widetilde{F_{V*}} \underset{\text{norm}}{\cong} c_0$.

3.21 Anmerkung

Mit ganz ähnlichen Methoden läßt sich zeigen, daß es in $E := (l^p)_S^I$, $1 < p < \infty$, für alle Indexmengen I eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_E$ gibt, so daß für alle $U \in \mathcal{U}_0$ gilt $\widetilde{E_U} \underset{\text{norm}}{\cong} l^p$.

3.22 Satz

Sei $E \in \mathcal{R}^{(p)}$, dann gibt es in E eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_E$, so daß für alle $U \in \mathcal{U}_0$ $\widetilde{E_U}$ normisomorph einem abgeschlossenen Teilraum von $\overline{l^p}$ ist.

Beweis:

W sei eine beliebig gegebene Nullumgebung in E ; nach 2.6 gibt es eine Nullumgebung $\hat{U} \in \mathcal{U}_E$, $\hat{U} \subset W$, so daß $\psi_{\hat{U}} : E \rightarrow \widetilde{E_{\hat{U}}}$ eine $(\overline{l^p})$ -S-Abbildung ist. Nach 3.11 hat $\psi_{\hat{U}}$ eine Darstellung $\psi_{\hat{U}} = \sum_n \hat{a}_n \langle \cdot, \hat{a}_n \rangle y_n$, wobei wir o. B. d. A. annehmen dürfen, daß $\|\sum_n \lambda_n y_n\| \leq 1$ gilt für alle $(\lambda_n) \in l^p$ mit $\|(\lambda_n)\|_p \leq 1$, $0 < (\hat{a}_n)$ eine monotone Nullfolge ist mit $\sup_n |\hat{a}_n| \leq \frac{1}{2}$, und daß $(\hat{a}_n)$ $\overline{l^p}$ -gleichmäßig ist in E' . Zu $(\hat{a}_n)$ wähle man eine Teilfolge (n_v) in

$\mathbb{N}$, $n_1 = 1$, mit $\hat{d}_{n_v} = 2^{-v}$, und man setze $d_n = \hat{d}_{n_v}$,
 $a_n = \frac{\hat{d}_n}{d_n} \hat{a}_n$ für alle $n_v \leq n < n_{v+1}$ und alle $v \in \mathbb{N}$.

Wegen $\hat{d}_n/d_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch (a_n) $\overline{l^p}$ -gleichmäßig, und es gilt $\Psi_U^\wedge = \sum_n d_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n$.

Sei $U := \{x \in E; \|(\langle x, a_n \rangle)\|_p \leq 1\}$. Da $T: E \rightarrow \overline{l^p}$,
 definiert durch $T(x) = (\langle x, a_n \rangle)_n$, eine Abbildung ist,
 ist $U \in \mathcal{A}_E$ eine Nullumgebung, und wegen $\text{Kern } T = p_U^{-1}(0)$
 gilt offenbar, daß $\tilde{E}_U$ einem abgeschlossenen Teilraum von
 $\overline{l^p}$ normisomorph ist. Für $x \in U$ ist

$$\begin{aligned} \|p_U^\wedge(x)\| &= \|\Psi_U^\wedge(x)\| = \left\| \sum_n d_n \langle x, a_n \rangle y_n \right\| \\ &\leq \sum_v d_{n_v} \left(\sum_{n=n_v}^{n_{v+1}-1} \langle x, a_n \rangle y_n \right) \leq \sum_n 2^{-n} \leq 1, \end{aligned}$$

denn $\|(\langle x, a_n \rangle)_{n \geq n_v}\|_p \leq 1$ und $\|\sum_n \lambda_n y_n\| \leq 1$ für alle
 $(\lambda_n) \in l^p$ mit $\|(\lambda_n)\|_p \leq 1$. Also ist $U \subset \hat{U}$.

3.23 Anmerkung

Abschließend sei noch festgehalten, daß der Übergang von
 der Betrachtung der kompakten $\overline{l^p}$ -Faktorisierbarkeit einer
 Abbildung $T: E \rightarrow F$ zu der der kompakten Faktorisierbar-
 keit über einen Raum $\mathcal{L}_p(\mu)$ keine Verallgemeinerung der
 Betrachtungsweise darstellt. Es gilt sogar:

X sei ein unendlich-dimensionaler $\mathcal{L}_p$ -Raum; $T: E \rightarrow F$
 ist genau dann eine $(\overline{l^p}$ -S)-Abbildung, wenn T eine $(X$ -S)-
 Abbildung ist.

Sei nämlich $T: E \rightarrow F$ kompakt über $\overline{l^p}$ faktorisiert ge-
 mäß $T = T_2 \circ T_1$. T_1 selbst ist eine $(\overline{l^p}$ -S)-Abbildung

(vgl. Anmerkung nach 3.11), die sich zerlegen läßt (vgl.

Beweis a) von 3.16) in

$$T_1 = \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1, \quad \psi_1 : E \rightarrow \overline{1^p}, \quad \psi_2 : \overline{1^p} \rightarrow \overline{1^p}, \\ \psi_3 : \overline{1^p} \rightarrow \overline{1^p}, \text{ mit kompakten Abbildungen } \psi_1, \psi_2, \psi_3.$$

Nach Lindenstrauss-Tzafriri [1], II, 5.5 enthält X für $1 \leq p < \infty$ einen zu l^p isomorphen, in X komplementierten

Teilraum Y ; $P : X \rightarrow Y$ sei die zugehörige Projektion,

$j : Y \hookrightarrow X$ die Einbettung von Y in X und $T : Y \rightarrow l^p$

eine Isomorphie. Dann ist T_1 durch

$$T_1 = (\psi_3 \circ T \circ P) \circ (j \circ T^{-1} \circ \psi_2 \circ \psi_1) \text{ kompakt über } X$$

faktorisiert. Für $p = \infty$ zeigen die obigen Überlegungen,

daß es genügt, eine kompakte Diagonalabbildung $D : c_0 \rightarrow c_0$,

definiert durch die Zuordnung $(\lambda_\nu) \mapsto (d_\nu \lambda_\nu)$ mit

$0 < (d_\nu) \in c_0$, über X zu faktorisieren.

Dazu betrachtet man die Adjungierte $D' : l^1 \rightarrow l^1$,

verwendet loc.cit. II, 5.5 wie oben und konstruiert mit

Hilfe des "Prinzips der lokalen Reflexivität" in loc.cit.

II, 5.1 eine Faktorisierung von $D : c_0 \rightarrow c_0$ über X .

Umgekehrt sei $T : E \rightarrow F$ kompakt über den $\mathcal{L}_p$ -Raum X

faktorisiert gemäß $T = T_2 \circ T_1$. Wie im Beweisteil "a) $\Rightarrow$ b)"

von 2.6 faktorisiert man für eine Nullumgebung $U \in \mathcal{A}_E$

$$T_1 \text{ durch } T_1 = \hat{T}_1 \circ \psi_U, \quad \psi_U : E \rightarrow \widetilde{E}_U, \quad \hat{T}_1 : \widetilde{E}_U \rightarrow X,$$

wobei T_1 insbesondere kompakt ist. X hat als $\mathcal{L}_p$ -Raum

die A.E. und mit 1.9 und 3.4 folgt $\hat{T}_1 \in F_{l^p}(E_U, X)$; also ist

T kompakt über $\overline{l^p}$ faktorisiert.

§ 4 (1²-S)-Räume

4.1 Definition

Eine Klasse $\mathcal{K}$ lokalkonvexer Räume heißt eine Varietät lokalkonvexer Räume, wenn $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist bezüglich der Bildung von isomorphen Bildern von Teilräumen, separierten Quotientenräumen und beliebigen topologischen Produkten von Räumen aus $\mathcal{K}$.

Wichtige Beispiele für Varietäten sind: $\mathcal{N}$, die Varietät der (N)-Räume; $\mathcal{S}$, die Varietät der (S)-Räume; die Varietät der Räume E, die mit der schwachen Topologie $\sigma(E, E')$ versehen sind.

4.2 Definition

Sei $\mathcal{K} \neq \emptyset$ eine Klasse lokalkonvexer Räume. $\mathcal{V}(\mathcal{K})$ sei die von $\mathcal{K}$ erzeugte Varietät lokalkonvexer Räume, das heißt der Durchschnitt aller Varietäten lokalkonvexer Räume, die $\mathcal{K}$ umfassen.

Von Nutzen sind die folgenden Abkürzungen. Für eine gegebene Klasse $\mathcal{K} \neq \emptyset$ lokalkonvexer Räume sei

- 1) $S(\mathcal{K})$ die Klasse der Räume, die isomorph einem Unter-
raum eines Raumes aus $\mathcal{K}$ sind.
- 2) $Q(\mathcal{K})$ die Klasse der Räume, die isomorph einem separierten Quotientenraum eines Raumes aus $\mathcal{K}$ sind.
- 3) $C(\mathcal{K})$ die Klasse der Räume, die isomorph einem topo-

logischen Produkt von Räumen aus $\mathcal{K}$ sind.

- 4) $P(\mathcal{K})$ die Klasse der Räume, die isomorph einem endlichen topologischen Produkt von Räumen aus $\mathcal{K}$ sind.

$\mathcal{B}$ sei die Klasse unendlich-dimensionaler (B)-Räume.

Mit diesen Bezeichnungen gelten

4.3 Satz

$\mathcal{K}$ sei eine nichtleere Klasse lokalkonvexer Räume; dann ist

- a) $\mathcal{V}(\mathcal{K}) = \text{QSC}(\mathcal{K}) = \text{SQC}(\mathcal{K})$,
 b) $\mathcal{V}(\mathcal{K}) = \text{SCQP}(\mathcal{K})$.

Beweis:

- a) Diestel, Morris, Saxon [1], Cor. 1.2 und Theorem 1.1
 b) loc. cit. Theorem 1.4.

4.4 Satz

- a) Z_1 und Z_2 seien gegeben; wenn für alle $X \in \mathcal{V}(Z_1)$ und für alle $Y \in \mathcal{V}(Z_2)$ jedes $T: X \rightarrow Y$ kompakt ist, dann gilt $\mathcal{V}(Z_1) \cap \mathcal{V}(Z_2) \subset \mathcal{S}$.
 b) $\bigcap_{X \in \mathcal{B}} \mathcal{V}(X) \subset \mathcal{S}$.

Beweis:

- a) Diestel, Morris [1], Lemma 2.
 b) loc. cit. Corollary 2.

Von entscheidender Bedeutung für diesen Paragraphen ist das folgende Theorem von Dvoretzky.

4.5 Satz

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n(k, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß jedes X mit $\dim X \geq n(k, \varepsilon)$ einen k -dimensionalen Teilraum Y besitzt mit der Eigenschaft $d(Y, l_k^2) = 1 + \varepsilon$ (vgl. 3.1).

Beweis:

Séminaire Maurey-Schwartz [1], Vorträge 26, 27.

4.6 Satz

$$\mathcal{R}^{(2)} = \mathcal{S} \cap \mathcal{V}(l^2)$$

Anmerkung: Insbesondere ist also $\mathcal{R}^{(2)}$ eine Varietät lokalkonvexer Räume.

Beweis:

$\mathcal{R}^{(2)} \subset \mathcal{S}$ ist klar nach der Definition von $\mathcal{R}^{(2)}$, und $\mathcal{R}^{(2)} \subset \mathcal{V}(l^2)$ folgt unmittelbar aus 4.3 a) und 2.10.

Sei nun $E \in \mathcal{S} \cap \mathcal{V}(l^2)$, und $T : E \rightarrow X$ sei eine Abbildung. Wegen $E \in \mathcal{S}$ ist T kompakt (1.3), und nach 4.3 b) ist $E \in \text{SCQP}(l^2) = \text{SC}(l^2)$. Die kompakte Abbildung $T : E \rightarrow X$ läßt sich über einen Teilraum Y von $(l^2)^J$ faktorisieren gemäß $T = T_2 \circ T_1$, $T_1 : E \rightarrow Y$, $T_2 : Y \rightarrow X$, (J ist eine geeignete endliche Indexmenge), wobei T_2 überdies wegen der Kompaktheit von T selbst kompakt ist (vgl. Diestel, Morris [1], Lemma 1). Bekanntlich ist $Y \stackrel{\text{top}}{\approx} l^2$; aus 2.5, 3.16 und 2.6 folgt, daß T_2 , und damit auch T , eine $(l^2\text{-S})$ -Abbildung ist. Also ist $E \in \mathcal{R}^{(2)}$ (2.6).

4.7 Lemma

$T : X \longrightarrow Y$ ist genau dann eine $(l^2\text{-}S)$ -Abbildung, wenn
 $T' : Y' \longrightarrow X'$ eine $(l^2\text{-}S)$ -Abbildung ist.

Beweis:

Ist $T : X \longrightarrow Y$ eine $(l^2\text{-}S)$ -Abbildung, so auch $T' : Y' \longrightarrow X'$
 nach 3.13.

Ist $T' : Y' \longrightarrow X'$ eine $(l^2\text{-}S)$ -Abbildung (o. B. d. A.
 nicht mit endlich-dimensionalem Bild), so auch $T'' : X'' \longrightarrow Y$.
 $(T''(X'') \subset Y$, vgl. Schaefer [1], VI, 9.2, Lemma 1).

Sei etwa $T'' = \hat{\varphi}_2 \circ \hat{\varphi}_1$, wobei $\hat{\varphi}_1 : X'' \longrightarrow l^2$,
 $\hat{\varphi}_2 : l^2 \longrightarrow Y$ kompakte Abbildungen sind. Sei $\varphi_1 := \hat{\varphi}_1|_X$,
 $Y = \overline{\varphi_1(X)}$, $\varphi_2 = \hat{\varphi}_2|_Y$. Dann gilt $T = \varphi_2 \circ \varphi_1$, und
 wegen $Y \underset{\text{norm}}{\cong} l^2$ ist T eine $(l^2\text{-}S)$ -Abbildung.

Das folgende Lemma zeigt, daß die Eigenschaft einer Teil-
 menge $A \subset E$, in einer kompakten Banach-Scheibe enthalten zu
 sein, deren Erzeugnis E_B isomorph zu l^2 ist, sich auf voll-
 ständige Teilräume von E nach unten vererbt. Eine typische
 Anwendung findet dieses Lemma im Beweis des (hier nicht
 aufgeführten) Satzes, daß die assoziierte $(l^2\text{-}S)$ -Topologie
 (vgl. 4.9 und 4.10) der Quotiententopologie eines sepa-
 rierten Quotientenraumes E/H gerade die Quotiententopologie
 der assoziierten $(l^2\text{-}S)$ -Topologie von E ist.

4.8 Lemma

H sei ein vollständiger Teilraum von (E, γ) , (x_n) sei l^2 -

summierbar in E , $0 < (d_n) \in c_0$, $A := \left\{ \sum_n \lambda_n d_n x_n; \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\}$,
dann gibt es in H eine l^2 -summierbare Folge (y_n) ,
 $0 < (d_n^*) \in c_0$, so daß $A \cap H \subset \left\{ \sum_n \lambda_n d_n^* y_n; \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\}$.

Beweis:

O. B. d. A. habe die Folge (x_n) einen unendlich-dimensionalen Spann. Man setze $B := \left\{ \sum_n \lambda_n d_n^{1/2} x_n; \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\}$;
 B ist eine Banach-Scheibe, denn B ist kompakt in E als
stetiges lineares Bild der kompakten Teilmenge

$K = \left\{ (d_n^{1/2} \lambda_n); \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\} \subset l^2$, vermittelt durch die
Abbildung $T: l^2 \rightarrow E$, $(\xi_v) \mapsto \sum_v \xi_v x_v$. Außerdem

gilt $E_B \cong l^2$, denn die Abbildung $\psi: l^2 \rightarrow E_B$,

$(\xi_v) \mapsto \sum_v \xi_v d_v^{1/2} x_v$, ist surjektiv und offen. $E_B \cap H$

ist abgeschlossen in E_B : (z_n) sei eine p_B -Cauchy-Folge in
 $E_B \cap H$; dann gibt es ein $\varrho > 0$, so daß (z_n) ganz in

$\varrho B \cap H$ liegt. Da ϱB kompakt und H vollständig ist, kon-
vergiert (z_n) als $\mathcal{T}$ -Cauchy-Folge gegen ein $z_0 \in \varrho B \cap H$,

und somit auch als p_B -Cauchy-Folge, da E_B eine Nullumge-
bungsbasis aus $\mathcal{T}$ -abgeschlossenen Mengen hat (vgl. Köthe
[1], p. 213).

Mithin gibt es eine Isomorphie $\psi: l^2 \rightarrow E_B \cap H$; da

$A := \psi(K)$ in E_B kompakt ist, ist $A \cap H$ in $E_B \cap H$ kompakt,

und zu $\psi^{-1}(A \cap H)$ gibt es nach 3.10 eine Nullfolge

$0 < (d_n^*) \in c_0$, so daß gilt $\psi^{-1}(A \cap H) \subset \left\{ (d_n^* \lambda_n); \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\}$.

Man setze $\psi(e_n) = y_n$; (y_n) ist l^2 -summierbar in $E_B \cap H$,
somit auch in $(H, \mathcal{T} \cap H)$, und es gilt:

$$A \cap H \subset \left\{ \sum_n \lambda_n d_n^* y_n; \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\}.$$

4.9 Definition und Satz

Zur lokalkonvexen Topologie $\mathcal{T}$ auf E existiert die assoziierte $(l^2\text{-}S)\text{-Topologie}$ $\mathcal{T}_{(l^2\text{-}S)}$, das ist die feinste unter allen $(l^2\text{-}S)\text{-Topologien}$ $\mathcal{V}$ auf E der Eigenschaft $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$.

Beweis:

Nach 4.6 ist $\mathcal{X}^{(2)}$ eine Varietät lokalkonvexer Räume, und in Varietäten lassen sich Initialtopologien bilden.

4.10 Satz

In $(E, \mathcal{T})$ wird eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}_{(l^2\text{-}S)}$ gebildet von allen Mengen der Form $\left\{ \sum_n \lambda_n d_n a_n; \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\}^0$, wobei $0 < (d_n) \in c_0$ und (a_n) eine $l^2\text{-summierbare}$ Folge ist in E'_0 für eine Nullumgebung U in E . In äquivalenter Formulierung: eine Nullumgebungsbasis für $\mathcal{T}_{(l^2\text{-}S)}$ wird gebildet von allen $\mathcal{T}$ -Nullumgebungen $U \in \mathcal{A}_E$, für die eine $\mathcal{T}$ -Nullumgebung $V \in \mathcal{A}_E$ existiert, $V \subset U$, so daß $\psi_{U,V} : \tilde{E}_V \rightarrow \tilde{E}_U$ eine $(l^2\text{-}S)\text{-Abbildung}$ ist.

Beweis:

Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Mengen der Form

$\left\{ \sum_n \lambda_n d_n a_n; \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\}$, wobei $0 < (d_n) \in c_0$ und (a_n) $l^2\text{-summierbar}$ ist in E'_0 für eine $\mathcal{T}$ -Nullumgebung $U \in \mathcal{A}_E$.

1) Zunächst ist zu zeigen, daß $\{A^0; A \in \mathcal{P}\}$ Nullumgebungsbasis einer lokalkonvexen Topologie $\hat{\mathcal{T}}$ auf E ist.

Dazu genügt es zu zeigen, daß zu gegebenen $A, B \in \mathcal{P}$ ein $C \in \mathcal{P}$ existiert, so daß gilt $C \supset A \cup B$. Sei etwa

$A^{(i)} = \left\{ \sum_n \lambda_n d_n^{(i)} x_n^{(i)} ; \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\} \in \mathcal{P}$, mit

$0 < (d_n^{(i)}) \in c_0$, mit l^2 -summierbaren $(x_n^{(i)})$ in $E_{U_i}^0$ für $\mathcal{U}$ -Nullumgebungen $U_i \in \mathcal{U}_E$, $i \in \{1, 2\}$.

$V := U_1 \cap U_2$ ist eine $\mathcal{U}$ -Nullumgebung aus $\mathcal{U}_E$, und es ist $V^0 = \overline{(U_1^0 \cup U_2^0)^{\sigma(E', E)}}$, also $p_{V^0} \in p_{U_i^0}$ für $i = 1, 2$ in $E_{U_i^0}^0$. Sei

$z_n = x_m^{(1)}$ falls $n = 2m$, und $z_n = x_m^{(2)}$ falls $n = 2(m-1) + 1$;
 $d_n = d_m^{(1)}$ falls $n = 2m$, und $d_n = d_m^{(2)}$ falls $n = 2(m-1) + 1$.

Dann ist $0 < (d_n) \in c_0$ und (z_n) ist l^2 -summierbar in E_V^0 ;

$(\sum_{v=1}^n \lambda_v z_v)_n$ ist nämlich für alle $(\lambda_v) \in l^2$ eine Cauchy-

Folge in E_V^0 . Das ergibt sich unmittelbar aus den folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned} p_{V^0} \left(\sum_{v=n}^{n+m} \lambda_v z_v \right) &\leq p_{V^0} \left(\sum_{v=n}^{n+m} \lambda_{v/2} x_{v/2}^{(1)} \right) + p_{V^0} \left(\sum_{v=n}^{n+m} \lambda_{(v-1)/2+1} x_{(v-1)/2+1}^{(2)} \right) \\ &\leq p_{U_1^0} \left(\sum_{v=n}^{n+m} \lambda_{v/2} x_{v/2}^{(1)} \right) + p_{U_2^0} \left(\sum_{v=n}^{n+m} \lambda_{(v-1)/2+1} x_{(v-1)/2+1}^{(2)} \right) \end{aligned}$$

Offenbar gilt $C := \left\{ \sum_n \lambda_n d_n z_n ; \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\} \in \mathcal{P}$ und $C \supset A^{(1)} \cup A^{(2)}$.

2) $\hat{\mathcal{U}}$ ist eine $(l^2\text{-}S)$ -Topologie auf E :

Für $A, B \in \mathcal{P}$, $A \subset B$, ist $\psi_{B,A} : E_A^1 \rightarrow E_B^1$ die Adjungierte der Abbildung $\varphi_{A^0, B^0} : \widetilde{E}_{B^0} \rightarrow \widetilde{E}_{A^0}$, und nach

4.7 genügt es zu zeigen, daß zu gegebenem $A \in \mathcal{P}$ ein $B \in \mathcal{P}$ existiert, $A \subset B$, so daß $\psi_{B,A} : E_A^1 \rightarrow E_B^1$ eine $(l^2\text{-}S)$ -Abbildung ist.

Zu $0 < (d_n^{(1)}) \in c_0$ gibt es $0 < (d_n^{(2)}) \in c_0$ mit $d_n^{(2)} \geq d_n^{(1)}$

für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß $(d_v^{(1)}/d_v^{(2)}) \in c_0$; zu gegebenem

$A^{(1)} = \left\{ \sum_n \lambda_n d_n^{(1)} x_n; \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\} \in \mathcal{P}$ betrachte man

$A^{(2)} = \left\{ \sum_n \lambda_n d_n^{(2)} x_n; \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\} \in \mathcal{P}$. Dann ist $A^{(1)}$

in $E_A^{(2)}$ relativ kompakt, und wegen $E_A^{(i)} \underset{\text{top}}{\approx} l^2$ (vgl.

den Beweis zu 4.8) für $i \in \{1, 2\}$ ist

$\varphi_{A^{(2)}, A^{(1)}} : E_A^{(1)} \longrightarrow E_A^{(2)}$ eine $(l^2\text{-}S)$ -Abbildung (vgl.

Anmerkung nach 3.11).

3) Es gilt $\hat{\gamma} = \gamma_{(l^2\text{-}S)}$:

γ^* sei eine $(l^2\text{-}S)$ -Topologie auf E mit $\sigma(E, E') \subset \gamma^* \subset \gamma$,

und A^* sei eine γ^* -gleichstetige Menge aus $\mathcal{A}_{E'_0}$; dann

gibt es ein ebensolches B^* in E' , $A^* \subset B^*$, so daß

$\varphi_{B^*, A^*} : E_{A^*}^1 \longrightarrow E_{B^*}^1$ eine $(l^2\text{-}S)$ -Abbildung ist. Nach

3.11 gilt dann $A^* \subset \left\{ \sum_n \lambda_n d_n z_n; \sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1 \right\} =: A$ für

eine geeignete Nullfolge $0 < (d_n) \in c_0$ und eine l^2 -summier-

bare Folge (z_n) in $E_{B^*}^1$. Zu B gibt es eine γ -Nullumgebung

$U \in \mathcal{A}_E$ mit $B^* \subset U^0$; dann ist die Folge (z_n) auch l^2 -summier-

bar in $E_{U^0}^1$, und es ist $A^* \subset A$, wobei A^0 eine $\hat{\gamma}$ -Nullum-

gebung ist.

4.11 Satz

E sei ein Fréchet-Raum und ein $(l^2\text{-}S)$ -Raum; dann ist auch

E_B^1 ein $(l^2\text{-}S)$ -Raum.

Beweis:

Nach einem bekannten Satz und nach 3.21 hat E eine abzähl-

bare Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}_0 = \{U_n; n \in \mathbb{N}\}$, wobei

$U_n \in \mathcal{A}_E$ und $\tilde{E}_{U_n} \underset{\text{top}}{\approx} l^2$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. E hat eine

Darstellung $E \cong \varprojlim_{\text{top}} (\widetilde{E}_{U_n}, \varphi_{U_n, U_{n+1}}, \mathbb{N})$, wobei o. B. d. A. angenommen werden kann, daß die Abbildungen

$$\varphi_{U_n, U_{n+1}} : \widetilde{E}_{U_{n+1}} \longrightarrow \widetilde{E}_{U_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ kompakt sind.}$$

Da $(\widetilde{E}_{U_n}, \varphi_{U_n, U_{n+1}}, \mathbb{N})$ ein reduziertes projektives Spektrum ist (vgl. Schaefer [1], p. 139), in E alle beschränkten Mengen relativ kompakt sind (denn E ist ja insbesondere eine vollständiger (S)-Raum), und die $\widetilde{E}_{U_n}$ reflexiv sind für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt nach Schaefer [1], IV, 4.4

$$E'_\beta \cong \varprojlim_{\text{top}} (E'_{U_n}, \varphi'_{U_{n+1}, U_n}, \mathbb{N}).$$

Da nach 1.7 die Abbildungen $\varphi'_{U_{n+1}, U_n} : E'_{U_n} \longrightarrow E'_{U_{n+1}}$ kompakt sind für alle $n \in \mathbb{N}$, ist E'_β ein (LS)-Raum

(vgl. Floret-Wloka [1], p. 124), also gilt nach Floret [1] $E'_\beta \in \mathcal{S}'$, und es ist daher $E'_\beta = (E', (\beta(E', E))_S)$. Nach Swart [1], Kap. 4 ist dann $E'_\beta \cong \varprojlim_{\text{top}} ((E'_{U_n})_S, \varphi'_{U_{n+1}, U_n}, \mathbb{N})$, und wegen $E'_{U_n} \cong l^2$ ist nach 3.16 a) $(E'_{U_n})_S$ ein $(l^2\text{-}S)$ -Raum für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus 4.6 und 3.15 a) folgt nun, daß E'_β ein $(l^2\text{-}S)$ -Raum ist.

4.12 Satz

E ist genau dann ein $(l^2\text{-}S)$ -Raum, wenn es zu jedem $X \in \mathcal{B}$ eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{A}_E$ gibt, so daß für alle $U \in \mathcal{L}_0$ $\widetilde{E}_U$ normisomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von X ist.

Beweis:

" $\Leftarrow$ " Aus der Darstellung $\tilde{E} \stackrel{\sim}{=} \varprojlim_{\mathcal{A}_E} (\tilde{E}_U, \varphi_{U,V}, \mathcal{A}_0)$ für jede Nullumgebungsbasis $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_E$ folgt $E \in \mathcal{V}(X)$ für alle $X \in \mathcal{B}$. Insbesondere gilt dann nach 4.4 b) und 4.6 $E \in \mathcal{R}^{(2)}$.

" $\Rightarrow$ " W sei eine Nullumgebung in E, und es sei $X \in \mathcal{B}$. Man wähle eine Nullumgebung $V \subset W$, $V \in \mathcal{A}_E$; nach 2.6 ist $\varphi_V : E \rightarrow \tilde{E}_V$ eine $(l^2\text{-S})$ -Abbildung, hat also nach 3.11 eine Darstellung $\varphi_V = \sum_n d_n \langle \cdot, a_n \rangle y_n$, wobei $0 < (d_n) \in c_0$, (a_n) l^2 -gleichmäßig in E' und (y_n) l^2 -summierbar ist in $\tilde{E}_V$. Nach Lindenstrauss-Tzafriri [1], I, 1.2 enthält X einen Teilraum $Y \in \mathcal{B}$ mit einer Schauderbasis (z_n) . Nach dem Vorbild des Beweises von 3.22 sei in der Darstellung von φ_V (d_n) wie folgt gegeben: zu einer konfinalen Teilfolge (n_v) in $\mathbb{N}$, $n_1 = 1$, mit $\sum_v d_{n_v}^{1/2} \leq 1$ sei $d_n = d_{n_v}$ für alle $n_v \leq n < n_{v+1}$ und alle $v \in \mathbb{N}$. Mit dem Theorem von Dvoretzky (4.5) konstruiert man zur Folge (n_v) eine strikt aufsteigende Folge (k_v) , $k_1 = 1$, so daß für alle $v \in \mathbb{N}$ in

$Y_{k_v} = \left\{ \sum_n \lambda_n z_n; (\lambda_n) \in \lambda(Y) \text{ und } \lambda_n \neq 0 \text{ höchstens für } k_v \leq n < k_{v+1} \right\}$ ein n_{v+1} -dimensionaler Teilraum $Z_{n_{v+1}}$ existiert mit der

Eigenschaft $d(l_{n_{v+1}}^2, Z_{n_{v+1}}) < 2$. Dementsprechend seien

Isomorphismen $\varphi_{n_{v+1}} : l_{n_{v+1}}^2 \rightarrow Z_{n_{v+1}}$ fest gewählt,

wobei $\|\varphi_{n_{v+1}}\| = 1$ und $\|\varphi_{n_{v+1}}^{-1}\| < 2$. Die Folge der

endlich-dimensionalen Teilräume (Y_{k_v}) liefert eine Schauder-Zerlegung von Y , und für alle $v \in \mathbb{N}$ seien die $\psi_{k_v} : Y \rightarrow Y_{k_v}$ die zugehörigen Projektionen; dann gibt es ein $0 < M < \infty$, so daß $\sup_v \|\psi_{k_v}\| \leq M$. Nun sei in der Darstellung von ψ_v die Folge (y_n) zusätzlich so gewählt, daß $\|\sum_n \lambda_n y_n\| \leq \frac{1}{2M}$ für alle $(\lambda_n) \in l^2$ mit $\sum_n |\lambda_n|^2 \leq 1$ (was sich erreichen läßt durch Multiplikation der Folge (a_n) mit einem geeigneten $\rho > 0$). $P_{n_v} : l^2 \rightarrow l^2_{n_v+1}$ sei definiert durch $P_{n_v}((\lambda_n)) = (\hat{\lambda}_n)$, $\hat{\lambda}_n = \lambda_n$ falls $n_v \leq n < n_{v+1}$ und $\hat{\lambda}_n = 0$ für alle sonstigen $n \in \mathbb{N}$. $\chi : E \rightarrow l^2$ sei definiert durch $\chi(x) = (\langle x, a_n \rangle)_n$. χ ist eine Abbildung, da die Folge (a_n) l^2 -gleichmäßig ist.

$T_1 : E \rightarrow X$ sei definiert durch

$$T_1 = \sum_v d_{n_v}^{1/2} \cdot \psi_{n_{v+1}} \circ P_{n_v} \circ \chi. \quad T_1 \text{ ist eine Abbildung:}$$

In E gibt es eine Nullumgebung $\hat{V}$, so daß $\|\chi(x)\|_2 \leq 1$ gilt für alle $x \in \hat{V}$. Für $x \in \hat{V}$ ist

$$\begin{aligned} \|T_1(x)\| &\leq \sum_v d_{n_v}^{1/2} \|\psi_{n_{v+1}}(P_{n_v}(\chi(x)))\| \\ &\leq \sum_v d_{n_v}^{1/2} \|\psi_{n_{v+1}}\| \|P_{n_v}\| \|\chi(x)\|_2 \leq 1. \end{aligned}$$

K sei die abgeschlossene Einheitskugel von Y ; dann ist

$T_1^{-1}(K) =: U \in \mathcal{A}_E$ eine Nullumgebung in E , und wegen

Kern $T_1 = p_U^{-1}(0)$ ist $\tilde{E}_U$ normisomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von Y , und damit auch von X .

$\hat{T}_2 : \text{Bild } T_1 \rightarrow \tilde{E}_U$ sei definiert durch

$$\hat{T}_2(z) = \sum_{\nu} d_{n_{\nu}}^{1/2} \left[\varphi_{n_{\nu+1}}^{-1}(\psi_{k_{\nu}}(z)) \times (y_n) \right].$$

Hierbei ist für $(\lambda_n) \in l^2$ $\left[(\lambda_n) \times (y_n) \right] := \sum_n \lambda_n y_n$.

$\hat{T}_2$ ist wohldefiniert, denn für $z \in \text{Bild } T_1$ hat z eine eindeutig bestimmte Summendarstellung $z = \sum_{\nu} z_{\nu}$ mit $z_{\nu} \in Z_{n_{\nu+1}} \subset Y_k$.

$\hat{T}_2$ ist stetig: Für $z \in K \cap \text{Bild } T_1$ ist

$$\|\hat{T}_2(z)\| \leq \sum_{\nu} d_{n_{\nu}}^{1/2} \|\varphi_{n_{\nu+1}}^{-1}(\psi_{k_{\nu}}(z)) \times (y_n)\|.$$

Nach Konstruktion der Abbildungen ist $\varphi_{n_{\nu+1}}^{-1}(\psi_{k_{\nu}}(z))$ ein $(\lambda_n) \in l^2$ mit $(\sum_n |\lambda_n|^2)^{1/2} \leq 2M$. Also ist

$$\|\varphi_{n_{\nu+1}}^{-1}(\psi_{k_{\nu}}(z)) \times (y_n)\| \leq 1 \quad \text{für alle } \nu \in \mathbb{N}; \text{ es folgt}$$

$$(*) \quad \|\hat{T}_2(z)\| \leq 1 \quad \text{für alle } z \in K \cap \text{Bild } T_1.$$

$T_2 : \overline{\text{Bild } T_1} \rightarrow \tilde{E}_V$ sei die eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung von $\hat{T}_2$. Es gilt nach Konstruktion

$\psi_V = T_2 \circ T_1$: Für $x \in E$ ist

$$\begin{aligned} T_2(T_1(x)) &= T_2\left(\sum_{\nu} d_{n_{\nu}}^{1/2}(\varphi_{n_{\nu+1}}(P_{n_{\nu}}(\chi(x))))\right) \\ &= \sum_{\nu} d_{n_{\nu}}^{1/2}(T_2(\varphi_{n_{\nu+1}}(P_{n_{\nu}}(\chi(x)))) \\ &= \sum_{\nu} d_{n_{\nu}}^{1/2}\left(\sum_{\mu} d_{n_{\mu}}^{1/2} \left[\varphi_{n_{\mu+1}}^{-1}(\psi_{k_{\mu}}(\varphi_{n_{\nu+1}}(P_{n_{\nu}}(\chi(x)))) \times (y_n) \right] \right) \\ &= \sum_{\nu} d_{n_{\nu}}^{1/2} d_{n_{\nu}}^{1/2} \left[\varphi_{n_{\nu+1}}^{-1}(\varphi_{n_{\nu+1}}(P_{n_{\nu}}(\chi(x)))) \times (y_n) \right] \\ &= \sum_{\nu} d_{n_{\nu}} \left[P_{n_{\nu}}(\chi(x)) \times (y_n) \right] \\ &= \sum_{\nu} d_{n_{\nu}} \left(\sum_{m=n_{\nu}-1}^{m_{\nu+1}-1} \langle x, a_n \rangle y_n \right) \\ &= \sum_{\nu} d_{\nu} \langle x, a_{\nu} \rangle y_{\nu} \\ &= \psi_V(x). \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt noch $U \subset V$: Sei $x \in U$; dann ist
 $p_V(x) = \|\varphi_V(x)\| = \|T_2(T_1(x))\| \leq 1$ nach (*), denn
 $T_1(x) \in K$.

4.13 Anmerkungen

1) 4.12 gehört zum Themenkreis der Sätze aus Saxon [1] ,
 Valdivia [1] . Saxon zeigt, daß nukleare Räume die in
4.12 beschriebene Eigenschaft haben; 4.12 charakterisiert
 die Räume dieser Eigenschaft. Valdivia zeigt, daß jeder
 nukleare Raum die folgende bemerkenswerte Eigenschaft hat:
 (*) Zu jedem separablen $X \in \mathcal{B}$ existiert eine Nullumgebungs-
 basis $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{A}_E$, so daß $\widetilde{E_U} \underset{\text{norm}}{\cong} X$ gilt für alle $U \in \mathcal{L}_0$.
 Daß die nuklearen Räume durch die Eigenschaft (*) sogar
 charakterisiert sind, ist nicht schwer einzusehen. Sei
 etwa E ein Raum der Eigenschaft (*) und $T : E \longrightarrow X$ eine
 Abbildung. Unmittelbar aus (*) folgt, daß T eine Faktori-
 sierung $T = T_2 \circ T_1$ über l^2 besitzt, $T_1 : E \longrightarrow l^2$,
 $T_2 : l^2 \longrightarrow X$. Die Abbildung T_1 besitzt eine Faktorisie-
 rung über l^1 , $T_1 = S_2 \circ S_1$, $S_1 : E \longrightarrow l^1$, $S_2 : l^1 \longrightarrow l^2$.
 Die Abbildung S_1 wiederum besitzt eine Faktorisierung über
 l^2 usw. Für die Abbildung $T : E \longrightarrow X$ läßt sich also die
 folgende Darstellung finden (Übergang zu neuen Bezeich-
 nungen)

$$T = S \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1 \circ R$$

wobei $R : E \longrightarrow l^1$, $T_1 : l^1 \longrightarrow l^2$, $T_2 : l^2 \longrightarrow l^1$,
 $T_3 : l^1 \longrightarrow l^2$, $S : l^2 \longrightarrow X$

Abbildungen sind. Nach 3.9 c) sind $(T_2 \circ T_1)$ und T_3 absolut-summierend, und nach 3.9 b) ist T eine nukleare Abbildung. Nach 1.3 ist E ein nuklearer Raum.

2) Aus 4.12 folgt die bemerkenswerte Gleichung

$\mathcal{X}^{(2)} = \bigcap_{X \in \mathcal{B}} \mathcal{V}(X)$. Sie wurde unabhängig davon von Bellenot in Bellenot [1] bewiesen in der Form

$S \cap \mathcal{V}(l^2) = \bigcap_{X \in \mathcal{B}} \mathcal{V}(X)$. Interessanterweise ist auch bei Bellenot der Angelpunkt der Argumentation eine Anwendung des Satzes 4.5 von Dvoretzky.

4.14 Satz

Äquivalent sind die folgenden Aussagen:

- a) E ist ein (l^2-S) -Raum.
- b) $E \in \bigcap_{X \in \mathcal{B}} \mathcal{V}(X)$.
- c) Jedes $X \in \mathcal{B}$ ist universell für E (vgl. 3.19).
- d) Für jede Nullumgebungsbasis $\mathcal{L}_0$ von E und für alle $X \in \mathcal{B}$ gibt es eine Einbettung $E \hookrightarrow X^{\mathcal{L}_0}$.
- e) Zu jeder Nullumgebungsbasis $\mathcal{L}_0$ von E gibt es eine Einbettung $E \hookrightarrow (l_S^2)^{\mathcal{L}_0}$.
- f) l_S^2 ist universell für E .

Beweis:

"a) $\Rightarrow$ b)" Zu $X \in \mathcal{B}$ wähle man mit 4.12 eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{A}_E$, so daß $\tilde{E}_U$ normisomorph ist zu einem abgeschlossenen Teilraum von X für alle $U \in \mathcal{L}_0$. Mit der Darstellung $\tilde{E} \xrightarrow[\text{top}]{\sim} \varprojlim (\tilde{E}_U, \varphi_{U,V}, \mathcal{L}_0)$ folgt $E \in \mathcal{V}(X)$.

"b) $\Rightarrow$ a)": Folgt aus 4.4 b) und 4.6.

"a) $\Rightarrow$ c)": folgt unmittelbar aus 4.12.

"c) $\Rightarrow$ b)": ist trivial.

"a) $\Rightarrow$ d)": $\mathcal{L}_0$ sei eine Nullumgebungsbasis von E, und es sei $X \in \mathcal{B}$. Nach 4.12 kann man zu jedem $U \in \mathcal{L}_0$ eine Nullumgebung $U^* \in \mathcal{U}_E$ wählen, $U^* \subset U$, so daß $\widetilde{E}_{U^*}$ norm-isomorph ist zu einem abgeschlossenen Teilraum von X.

Die so erhaltene Nullumgebungsbasis sei mit $\mathcal{L}_0^*$ bezeichnet. Offenbar ist $|\mathcal{L}_0^*| \leq |\mathcal{L}_0|$, und es gibt daher eine Einbettung $E \hookrightarrow X^{\mathcal{L}_0^*}$.

"d) $\Rightarrow$ b)": ist trivial.

"a) $\Rightarrow$ e)": $\mathcal{L}_0$ sei eine Nullumgebung von E. Wie in "a) $\Rightarrow$ d)" findet man eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{L}_0^* \subset \mathcal{U}_E$,

$|\mathcal{L}_0^*| \leq |\mathcal{L}_0|$, so daß entweder $\widetilde{E}_U$ endlich-dimensional ist oder $\widetilde{E}_U \stackrel{\text{norm}}{\cong} l^2$ für alle $U \in \mathcal{L}_0^*$. Also gibt es eine Einbettung $E \hookrightarrow (l^2)^{\mathcal{L}_0^*}$. Da E ein (S)-Raum ist, folgt nach Swart [1], Kap. 4, die Existenz einer Einbettung $E \hookrightarrow (l_S^2)^{\mathcal{L}_0}$.

"e) $\Rightarrow$ f)": ist trivial.

"f) $\Rightarrow$ a)": Nach 3.16 a) gilt $l_S^2 \in \mathcal{R}^{(2)}$. Mit 4.6 folgt $E \in \mathcal{R}^{(2)}$.

Hervorzuheben ist die Gleichung $\mathcal{R}^{(2)} = \bigcap_{X \in \mathcal{B}} \mathcal{V}(X)$.

4.15 Anmerkung

Sei $\mathcal{P}_n^{(p)}(X) := \inf \{d(Y, l_n^p) ; Y \text{ ist } n\text{-dim. Teilraum von } X\}$. Für jedes $p \neq 2$ ist $(\mathcal{P}_n^{(p)}(l^2))_n$ eine unbeschränkte Folge.

Man nehme etwa an, daß $(\mathcal{F}_n^{(p)}(l^2))_n$ für ein $p \neq 2$ eine beschränkte Folge ist. Da es auf endlich-dimensionale Teilräume von l^2 eine Projektion der Norm 1 gibt, zeigt man, wie im Beweisteil " $\Rightarrow$ " von 4.12, daß jede $(l^p\text{-}S)$ -Abbildung sich kompakt über l^2 faktorisieren läßt. Insbesondere würde folgen $\mathcal{R}^{(p)} \subset \mathcal{R}^{(2)}$, im Widerspruch zu 3.18.

Aus dieser Beobachtung folgt vor allem, daß auch die folgende abgeschwächte Formulierung des Satzes von Dvoretzky für $p \neq 2$ falsch ist:

Zu jedem $X \in \mathcal{B}$ gibt es ein $p \neq 2$, so daß $(\mathcal{F}_n^{(p)}(X))_n$ eine beschränkte Folge ist.

4.16 Anmerkung

Nur für $p = 2$ ist jeder Teilraum eines $(l^p\text{-}S)$ -Raumes wieder ein $(l^p\text{-}S)$ -Raum; insbesondere gilt nur für $p = 2$, daß $\mathcal{R}^{(p)}$ eine Varietät lokalkonvexer Räume ist.

Zum Beweis sei zunächst $p = \infty$:

Wäre jeder Teilraum eines $(l^\infty\text{-}S)$ -Raumes wieder ein $(l^\infty\text{-}S)$ -Raum, so wäre nach 3.20 jeder (S) -Raum ein $(l^\infty\text{-}S)$ -Raum; insbesondere hätte jeder (S) -Raum die A.E. (2.8), was nach 2.8 falsch ist.

Sei nun $1 < p < \infty$ und $p \neq 2$:

Nach 3.16 ist $(l^p)_S$ ein $(l^p\text{-}S)$ -Raum; wäre jeder Teilraum E von $(l^p)_S$ wieder ein $(l^p\text{-}S)$ -Raum, so wäre insbesondere für jeden abgeschlossenen Teilraum Y von l^p Y_S ein

$(l^p\text{-}S)\text{-Raum}$, denn die durch $(l^p)_S$ auf Y induzierte $(S)\text{-Topologie}$ ist gerade die zur Normtopologie von Y assoziierte $(S)\text{-Topologie}$ (vgl. Swart [1] , Kap. 4).

Nach 3.16 wäre dann aber für jeden abgeschlossenen Teilraum Y von l^p Y ein $\mathcal{L}_p$ -Raum oder ein $\mathcal{L}_2$ -Raum; da kein Teilraum von l^p isomorph zu l^2 sein kann (vgl. Lindenstrauss-Tzafriri [1] , I, 2.7), ist jeder abgeschlossene Teilraum von l^p ein $\mathcal{L}_p$ -Raum und damit nach Lindenstrauss-Tzafriri [1] , II, 5.21 isomorph zu l^p selbst.

Widerspruch! (vgl. loc. cit. I, 2.25)

Sei $p = 1$: Wäre jeder Teilraum eines $(l^1\text{-}S)\text{-Raumes}$ wieder ein $(l^1\text{-}S)\text{-Raum}$, so wäre nach 3.16 mit Hilfe der soeben angestellten Überlegungen jeder Teilraum eines $\mathcal{L}_1$ -Raumes wieder ein $\mathcal{L}_1$ -Raum. Nach loc. cit. II, 5.33 läßt sich l^2 isomorph in einen $\mathcal{L}_1$ -Raum einbetten. Wieder nach 3.16 gilt dann $l^2_S \in \mathcal{R}^{(1)} \cap \mathcal{R}^{(2)} = \mathcal{N}$ (3.17). Widerspruch! Nach 4.14 würde nämlich folgen $\mathcal{R}^{(2)} = \mathcal{N}$.

Literatur-Verzeichnis

S. F. Bellenot

- [1] The Schwartz-Hilbert variety. Michigan Math. J. 22, 373-377 (1975).

B. S. Brudovskii

- [1] Associated nuclear topology, mappings of type s, and strongly nuclear spaces. Soviet. Math. Dokl. Vol. 9 No 1, 61-63 (1968).

J. Diestel and S. A. Morris

- [1] Remarks on varieties of locally convex spaces. J. London Math. Soc. 8, 271-278 (1974).

J. Diestel, S. A. Morris and S. A. Saxon

- [1] Varieties of linear topological spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 172, 207-230 (1972).

A. Dvoretzky

- [1] Some results on convex bodies and Banach spaces. In: Proc. Symp. on Linear Spaces. Jerusalem 1961.

K. Floret

- [1] Lokalkonvexe Sequenzen mit kompakten Abbildungen. Dissertation, Kiel 1969.

K. Floret und J. Wloka

- [1] Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume. LNM 56, Berlin-Heidelberg-New York 1968.

A. Grothendieck

- [1] Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 16, 1955.
- [2] Espaces vectoriels topologiques. Sao Paulo 1964.

H. Hogbe-Nlend

- [1] Les espaces de Fréchet-Schwartz et la propriété d'approximation. C. R. Acad. Sc. Paris 275, Serie A 1073-1075 (1972).

J. Horvath

- [1] Topological vector spaces and distributions Vol. 1. Reading Mass. 1966.

H. Jarchow

- [1] Die Universalität des Raumes c_0 für die Klasse der Schwartz-Räume. Math. Ann. 203, 211-214 (1973).

W. B. Johnson

- [1] Factoring compact operators. Israel J. Math. 9, 337-345 (1971).

G. Köthe

- [1] Topologische lineare Räume I. Berlin-Heidelberg-New York 1966.

K. Lang

- [1] Über spezielle Klassen von Schwartz-Räumen. Arch. Math. 28, 287-296 (1977).
- [2] Über spezielle Klassen von Schwartz-Räumen II. Arch. Math. 30, 200-209 (1978).

J. Lindenstrauss and A. Pelczynski

- [1] Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ -spaces and their applications. Stud. Math. 29, 275-326 (1968).

J. Lindenstrauss and L. Tzafriri

- [1] Classical Banach spaces. LNM 388, Berlin-Heidelberg-New York 1973.

B. Maurey et L. Schwartz

- [1] Espaces L^p et applications radonifiantes (Séminaire). Paris 1972/73.

A. Pietsch

- [1] Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen. Stud. Math. 28, 333-353 (1967).
[2] l^p -faktorisierbare Operatoren in Banach-Räumen. Acta Sci. Math. (Szeged) 31, 117-123 (1970).
[3] Nuclear locally convex spaces. Berlin-Heidelberg-New York 1972.

D. Randtke

- [1] Characterisation of precompact maps, Schwartz-spaces and nuclear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 165, 87-101 (1972).
[2] On the embedding of Schwartz-spaces into product spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 55, 87-92 (1976).

W. Roelcke

- [1] Topologische lineare Räume I und II. Vorlesungsausarbeitung, München 1969.

S. A. Saxon

- [1] Embedding nuclear spaces in products of an arbitrary Banach space. Proc. Amer. Math. Soc. 34, 138-140 (1974).

H. H. Schaefer

- [1] Topological vector spaces. Berlin-Heidelberg-New York 1973.

I. Singer

- [1] Bases in Banach spaces I. Berlin-Heidelberg-New York 1970.

J. Swart

- [1] Zur Theorie der Schwartz-Räume. Dissertation, Zürich 1973.

M. Valdivia

- [1] Nuclearity and Banach spaces. To appear.

J. Wloka

- [1] Funktionalanalysis und Anwendungen. Berlin 1971.

Lebenslauf

Geburtsdatum: 2. März 1943

Geburtsort: Berlin

Schulbildung: Ostern 1950 eingeschult in der Volksschule Mainz-Zahlbach; Februar 1963 Abitur am Rabanus-Maurus-Gymnasium Mainz.

Studium: Studium der Philosophie, Germanistik und Musikwissenschaft seit SS 1963 an der Universität Mainz; ab SS 1964 Studium dieser Fächer an der Universität Hamburg und seit dem WS 1965/66 wieder an der Universität Mainz. Promotion zum Dr. phil am 31. Januar 1970 in Mainz. Danach Studium der Mathematik und Vordiplom Mathematik an der Universität Mainz im SS 1971; danach Wechsel zur Universität Bonn für das WS 1971/72 und seit SS 1972 Studium der Mathematik an der Universität München.

Abschlußprüfungen: Promotion zum Dr. phil am 31. Jan. 1970 an der Gutenberg-Universität Mainz. Diplom-Hauptprüfung für Mathematik am 12. Nov. 1974 an der Ludwig-Maximilians-Universität München.

Berufliche Tätigkeiten: Wissenschaftlicher Mitarbeiter am physiologischen Institut der Universität Bonn im WS 1971/72; SS 1972 bis WS 1974/75 Korrektor am mathematischen Institut der Universität München.

